COMENTARII OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2014
FAZA LOCALĂ A MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

Abstract. Comments on some of the problems presented at the Local Round of the National Mathematics Olympiad 2014, Bucharest & Ilfov.

Se adresează claselor V, VI, VII, VIII.
Data: 25 februarie 2014.
Autor: Dan Schwarz (*Danton sur lie*), Bucureşti.

1. Introducere

Aceste comentarii asupra Fazei Locale a Olimpiadei de Matematică 2014 a municipiului Bucureşti, reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului.[1]

Ele sunt adăugate la o prezentare selectivă a probelor de concurs.[2]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

2. Clasa a IV-a

Subiectul (2 – **IF**). **(7p)** *Scrieţi numărul* 613 *ca o sumă de trei termeni, astfel încât fiecare termen să fie cu* 1 *mai mare decaât dublul numărului precedent.*

Prezentat doar pentru chestiunile de exprimare şi scriere.

Subiectul (4 – **IF**). *Un şoricel are* 10 *grame, iar şoricuţa are* 6 *grame.*

(2p) *a) Câte grame au împreună* 13 *şoricei şi* 12 *şoricuţe?*

(5p) *b) Daţi cel puţin trei exemple în care un grup format din ţşoricei şi şoricuţe să cântărească exact* 200 *de grame.*

Am văzut, la viaţa mea, nişte şoricuţe graaaaase ... dar **ţoricei** n-am văzut! Cel puţin greutatea este în limitele naturale, de nu multe grame.

3. Clasa a V-a

Subiectul (1 – **IF**). *a) Comparaţi numerele naturale* a *şi* b *, ştiind că ...*

---

[1] Un revoluţionar care şi-a pierdut capul ... aşa că a ajuns pe drojdie.

[2] Lipsesc multe probleme, la care nu am găsit interesul de a fi prezentate. De aceea, am completat prezentarea cu unele probleme de la faza locală a judeţului Ilfov, la care am şi acolo câte ceva de spus.

Subiectul (2)**. a)** *Determinaţi toate perechile de numere naturale* (n, p) *care verifică egalitatea*

$$(n+1)(n+2p) = 1+2+3+4;$$

b) *Determinaţi câte perechi de numere naturale* (n, p) *care verifică egalitatea*

$$(n+1)(n+2p) = 1+2+3+\cdots+2014.$$

Ion Cicu, *G.M.-B. nr. 10/2013*

Soluţie. a) $(n+1)(n+2p) = 1+2+3+4 = 10 = 2\cdot 5$ şi $n+1 \leq (n+2p)+1$. Aceasta duce la soluţiile $\boxed{(n,p) = (0,5)}$ şi $\boxed{(n,p) = (1,2)}$.

b) $1+2+3+\cdots+2014 = \dfrac{2014\cdot 2015}{2} = 1007\cdot 2015$ este număr impar. Deoarece $n+1$ şi $n+2p$ sunt de paritate diferită, rezultă că $(n+1)(n+2p)$ este număr par, şi deci avem zero soluţii. □

4. Clasa a VI-a

Subiectul (3)**.** *Dacă numerele naturale* x, y, z *verifică egalitatea*

$$67x + 52y = 15z,$$

arătaţi că numărul $(x+y)(y+z)(z+x)$ *se divide cu* 2010.

Nicolae Ivăşchescu

Soluţie. 2010? ... a trecut de mult. Mai întâi factorizăm $2010 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$. Apoi scriem $67(x+y) = 15(y+z)$, ceea ce forţează $15 \mid x+y$ şi $67 \mid y+z$. Finalmente, scriem $15(z+x) = 2(41x+26y)$, ceea ce forţează $2 \mid z+x$ (dar această ultimă divizibilitate este obţinută într-un mod foarte ocolit – şi fără precizie – în soluţia oficială). □

5. Clasa a VII-a

Subiectul (2 – **IF**)**. (7p)** *Să se determine două numere naturale a căror sumă este* 29*, ştiind că unul are exact* 2 *divizori pozitivi, iar celălalt exact* 5 *divizori pozitivi, iar suma tuturor divizorilor (celor 7) este* 45*.*

Soluţie. Dacă a este primul număr, atunci $a = p$, cu p prim. Dacă b este al doilea număr, atunci $b = q^4$, cu q prim. Avem $a+b = 29$, deci $b < 3^4 = 81$, aşadar $q = 2$ şi $\boxed{b = 16}$, prin urmare $\boxed{a = 13}$.

Cerinţa asupra sumei divizorilor este redundantă; desigur, putem verifica $(1+13)+(1+2+4+8+16) = 45$. Soluţia oficială calculează cu sârg $(1+p)+(1+q+q^2+q^3+q^4) = 45$ şi ajunge, chinuit şi cu greşeli de scriere, la rezultat. De nepermis, doar din dorinţa de a verifica cunoaşterea formulei de sumă a divizorilor, să se pervertească într-atâta întrebarea pusă ... □

Subiectul (1)**.** *Determinaţi toate perechile de numere naturale* (a, b) *care verifică egalitatea*

$$a^2b^2 - 11a^2 - 11b^2 = 1893.$$

Eugen Predoiu, *G.M.-B. nr. 10/2013*

Soluţie. O simplă factorizare (copilaşii de peste tot numesc aceasta **SFFT** "Simon's Favourite Factoring Trick") este ca din $a^2b^2 - 11a^2 - 11b^2 = 1893$ să ajungem la $(a^2-11)(b^2-11) = 1893+11^2 = 2014 = 2\cdot 19\cdot 53$. Mai departe e trivial. **Memorizaţi această factorizare; anul acesta va aduce un abuz de utilizare a numărului 2014 în probleme de tot felul!** □

Subiectul (3)**.** *Se consideră numerele întregi nenule* a*,* b *şi* c *care verifică egalitatea*

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

a) *Arătaţi că* $|a + b + c| \leq 3$*;*
b) *Arătaţi că cel puţin unul dintre numerele* a, b, c *are modulul egal cu* 1*.*

Lucian Petrescu & Cristian Mangra

Soluţie. a) $|a + b + c| = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right| \leq \left|\frac{1}{a}\right| + \left|\frac{1}{b}\right| + \left|\frac{1}{c}\right| \leq 1 + 1 + 1 = 3$ (baremul chiar dă şi cazurile de egalitate $(a, b, c) \in \{(1, 1, 1), (-1, -1, -1)\}$, deşi acest lucru este irelevant). Iarăşi, raţiunea acestui punct "ajutător" este să sugereze metoda de atac de la punctul următor.

b) Dacă niciunul dintre numerele a, b, c nu are modulul egal cu 1, obţinem ca mai sus

$$|a + b + c| = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right| \leq \left|\frac{1}{a}\right| + \left|\frac{1}{b}\right| + \left|\frac{1}{c}\right| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

deci $|a + b + c| \leq 1$. Din motive necunoscute, soluţia oficială conţine şi inegalitatea nejustificată $1 \leq |a + b + c|$ (poate că raţionamentul falacios a fost – dacă a, b, c sunt nenule, atunci şi $a+b+c$ este nenul?!?), şi deci comite omisiunea importantă a cazului $a+b+c = 0$. Să notăm $\sigma = \sum a$, $\delta = \sum ab$, $\pi = abc$. Condiţia din enunţ se scrie aşadar $\delta = \sigma \cdot \pi$. Atunci avem cazurile

- $\sigma = 0$. Aceasta duce repede la o contradicţie, de exemplu pentru că atunci $\sum a^2 = \sigma^2 - 2\delta = 0$, ceea ce duce la $a = b = c = 0$, absurd. Sunt curios dacă corectura a penalizat lipsa acestui caz, din moment ce chiar soluţia oficială îl ignoră ...
- $\sigma = \pm 1$. Metoda elegantă este să calculăm

$$(\sigma - a)(\sigma - b)(\sigma - c) = \sigma^3 - \sigma^2 \cdot \sigma + \sigma \cdot \delta - \pi = (\sigma^2 - 1)\pi = 0,$$

prin urmare cel puţin unul dintre a, b, c este egal cu $\sigma = \pm 1$. (Soluţia oficială se complică inutil, mergând până la a invoca, fără justificare, $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ ca singura posibilitate pentru unul dintre cazuri.)

În final, baremul obligă 1 punct pentru un exemplu de soluţie (se oferă exemplul $(a, b, c) = (1, 2, -2)$), deşi acest lucru **nu este cerut prin enunţ**.

Dar dacă tot am ajuns până aici, de ce să nu mergem *whole hog*? Să zicem că $a = \pm 1$; atunci $a = \frac{1}{a}$, ceea ce conduce la $b + c = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, adică $(b+c)(bc-1) = 0$. Atunci sau $b = c = \pm 1$ sau $b = -c$, deci soluţiile complete la ecuaţia dată sunt $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ şi $(\pm 1, n, -n)$ (şi permutările). $\square$

6. Clasa a VIII-a

Subiectul (2 – **IF**). **(4p)** *a) Rezolvaţi ecuaţia*

$$|x-1| + |x-2| + \cdots + |x-2013| = 2014(x-2014).$$

(3p) *b) Arătaţi că*

$$x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \geq x\sqrt{y} + y\sqrt{x},$$

$\forall$ *pentru toţi* $x, y \in \mathbb{R}_+$.

Soluţie. a) Având membrul stâng pozitiv, deci $x > 2014$, ecuaţia revine la $2013x - \frac{2013 \cdot 2014}{2} = 2014x - 2014^2$, de unde $x = 1007 \cdot 2015$.

b) Avem factorizarea evidentă

$$(x\sqrt{x} + y\sqrt{y}) - (x\sqrt{y} + y\sqrt{x}) = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \geq 0,$$

cu egalitate pentru $x = y$. $\square$

Mi se pare extrem de simplu, mai mult la nivelul unui extemporal de clasă. Să nu uităm că premergător fazei locale există o etapă ”pe şcoală”, care deja e presupusă a alege elementele mai valoroase, pentru care o astfel de întrebare este cam ne-la-locul ei.

Subiectul (1). *Demonstraţi că dacă a, b şi n sunt numere naturale nenule astfel încât* $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = n$, *atunci numărul*

$$A = \underbrace{\sqrt{n + \sqrt{n + \cdots + \sqrt{n + \sqrt{n+2}}}}}_{2014 \textit{ radicali}}$$

este natural.

Lucian Petrescu

Soluţie. O combinaţie nefericită. Ecuaţia se scrie $\frac{a^2 + b^2}{ab}$ $(= n^2 - 2) \in \mathbb{N}$, care implică $a = b$, deci $n = 2$ (în detaliile ei, aceasta aduce 6 din cele 7 puncte disponibile). Telescoparea $A = 2$ este apoi imediată, şi irelevantă, cu numărul de radicali de asemenea irelevant. Iar cerinţa ”$A \in \mathbb{N}$”, în loc de simplul ”calculaţi A”, este un alt exemplu de eufemism rău întrebuinţat în enunţurile problemelor din ultimul timp. $\square$

Subiectul (2)**.** *Se consideră expresia* $E(a,b) = \dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{16ab}{a^2+b^2}$*, unde a şi b sunt numere reale strict pozitive.*

a) *Arătaţi că numărul* $E(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$ *este raţional;*

b) *Determinaţi cel mai mare număr real n pentru care are loc inegalitatea* $E(a,b) \geq n$*, oricare ar fi numerele reale strict pozitive a şi b.*

Traian Preda

Soluţie. a) Soluţia oficială a acestui punct constă în compactul şi directul $\boxed{E(a,b) = 36\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}}$ (fără altă justificare), dar acest lucru nu este deloc în **spiritul** întrebării. Valoarea exactă este irelevantă, şi poate apare ca doar o "coincidenţă", dacă ne mărginim la efectuarea calculelor.

Felul în care văd eu abordarea corectă este să nu ne pierdem în calcule sterile (nimeni nu ne-a cerut **valoarea exactă**). Deoarece $a = 1 - \sqrt{2}$ şi $b = 1 + \sqrt{2}$ sunt conjugate, suma $\sigma = a + b$ şi produsul $\pi = ab$ ale lor sunt raţionale. Deoarece expresia $E(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1) = E(-a, b)$ este simetrică în a, b, ea se exprimă ca expresie raţională în funcţie de σ şi π. Dacă e chiar să punem şi punctul pe **i**, putem scrie

$$E(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1) = E(-a,b) = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{16ab}{a^2+b^2} = \frac{(\sigma^2-2\pi)^2 - 2\pi^2}{\pi^2} - \frac{16\pi}{\sigma^2 - 2\pi}.$$

b) Soluţia dată în concurs de un băiat (pentru care a primit **0** puncte; să sperăm că se întoarce pe dos la contestaţii!). Scriem

$$E(a,b) = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{16}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} - 2.$$

Notând $x = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$ şi aplicând inegalitatea mediilor, obţinem

$$E = x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x} - 2 \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{8}{x}} - 2 = 10,$$

cu egalitate pentru $x^2 = \dfrac{8}{x}$, adică $x = 2$, care conduce la $a^2 + b^2 - 2ab = 0$, de unde $a = b$. Aşadar $\boxed{n = 10}$. □

Subiectul (4)**.** *Arătaţi că, dacă a, b şi c sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza a, atunci*

a) $\dfrac{a}{\sqrt{bc}} \geq \sqrt{2}$*;*

b) $\dfrac{(a-b)(a-c)}{(a+b)(a+c)} \leq 17 - 12\sqrt{2}$

Valerian Vlăescu, *G.M.-B. nr. 10/2013*

Soluţie. a) Acest punct "ajutător" este evident doar inegalitatea mediilor $\sqrt{b^2+c^2} \geq \sqrt{2bc}$, în cea mai simplă formă a sa. Alternativ (pentru punctul următor), putem scrie $\frac{b}{a} = \sin 2\theta$, $\frac{c}{a} = \cos 2\theta$, pentru un $\theta \in (0, \pi/4)$. Atunci

$$\frac{a^2}{bc} = \frac{1}{\sin 2\theta \cos 2\theta} = \frac{2}{\sin 4\theta} \geq 2.$$

b) Expresia $\frac{(a-b)(a-c)}{(a+b)(a+c)}$ se poate acum scrie $\frac{(1-\sin 2\theta)(1-\cos 2\theta)}{(1+\sin 2\theta)(1+\cos 2\theta)}$. Avem

$$E(\theta) = \frac{(1-\sin 2\theta)(1-\cos 2\theta)}{(1+\sin 2\theta)(1+\cos 2\theta)} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\tan^2\theta.$$

Notând $t = \tan\theta$, deci având $t \in (0, 1)$, aceasta se scrie mai departe

$$\sqrt{E(\theta)} = F(t) = \frac{t(1-t)}{1+t} = (\sqrt{2}-1)^2 - \frac{\left(t-(\sqrt{2}-1)\right)^2}{1+t} \leq (\sqrt{2}-1)^2,$$

de unde $E(\theta) \leq (\sqrt{2}-1)^4 = 17 - 12\sqrt{2}$, cu egalitate pentru $t = \sqrt{2}-1$, adică $\theta = \frac{\pi}{8}$, când $b = c$.[3]

Nu mă puteţi sili să folosesc neapărat "cârja" oferita la punctul a). □

Subiectele clasei a VIII-a suferă dintr-un abuz de expresii $\frac{a}{b}$ / $\frac{b}{a}$. Cam multă algebră sterilă, fără idee şi fără merit.

7. Încheiere

Problemele de gimnaziu mă interesează mai mult (decât cele de liceu) în această fază a competiţiei, fiind mai puţin supuse unor stricte cerinţe "tehnice", deci permiţând mai multă libertate şi originalitate (care din păcate nu sunt chiar în proporţia ideală; reţeta "gustării" este cam fadă). Multe dintre probleme au rămas destul de neatractive, iar "scăpările" din soluţiile oficiale sunt descurajante.

[3]Altfel, funcţia $t \mapsto \ln\tan\theta$ este concavă pe $(0, \pi/4)$. Inegalitatea lui Jensen ne oferă atunci $\ln\tan\theta + \ln\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) \leq 2\ln\tan\frac{\pi}{8}$, deci $\sqrt{E(\theta)} = \tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) \leq \tan^2\frac{\pi}{8}$, cu egalitate pentru $\theta = \frac{\pi}{8}$, când $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$.