X International Zhautykov Olympiad in Sciences
Kazakhstan, January 12-18, 2014
Presentation of the Mathematics Section, by Dan Schwarz

First Day (January 14, 2014) – Problems [1]

Problem 1. Points M, N, K lie on the sides BC, CA, AB respectively, of a triangle ABC, and are different from its vertices. The triangle MNK is called *beautiful* if the triangles MNK and ABC are similar (with the vertices respectively in this order). Show that if in the triangle ABC there are two beautiful triangles with a common vertex, then $\triangle ABC$ is right-angled.

Problem 2. Do there exist? functions $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

a) f is a surjective function; and
b) $f(f(x)) = (x-1)f(x) + 2$ for all x real.

Problem 3. There are given 100 distinct positive integers. We call a pair of integers among them *good* if the ratio of its elements is either 2 or 3. What is the maximum number g of good pairs that these 100 numbers can form? (A same number can be used in several pairs.)

Second Day (January 15, 2014) – Problems

Problem 4. Does it exist? a polynomial $P(x)$ with integer coefficients, such that $P(1+\sqrt{3}) = 2+\sqrt{3}$ and $P(3+\sqrt{5}) = 3+\sqrt{5}$.

Problem 5. Let $U = \{1, 2, 3, \ldots, 2014\}$. For all $a, b, c \in \mathbb{N}$ let $f(a, b, c)$ be the number of ordered sextuplets $(X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3)$ of subsets of U, satisfying the following conditions

(i) $Y_1 \subseteq X_1 \subseteq U$ and $|X_1| = a$;
(ii) $Y_2 \subseteq X_2 \subseteq U \setminus Y_1$ and $|X_2| = b$;
(iii) $Y_3 \subseteq X_3 \subseteq U \setminus (Y_1 \cup Y_2)$ and $|X_3| = c$.

Prove $f(\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c))$ does not change, for permutations σ of a, b, c.

Problem 6. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral, partitioned by four lines as in the picture below, such that the meeting points of these lines all lie on the diagonals of $ABCD$. Prove that if the corner quadrilaterals $1, 2, 3$ and the center quadrilateral 4 are all tangential, then the corner quadrilateral 5 is also tangential.

[1] Prezentarea problemelor din cadrul secţiunii matematice a concursului Zhautykov din acest an este făcută şi popularizată cu scopul de a vedea încă un alt concurs internaţional, pentru a putea cântări dificultatea probelor, în comparaţie cu propriile noastre concursuri, de selecţie sau de palmares. Deoarece concursul este internaţional, am preferat a face prezentarea în limba engleză, dar comentariile vor fi făcute în limba română, ca şi anunţarea rezultatelor, la încheierea acestui material. Enunţurile de pe prima pagină sunt urmate de soluţii detaliate şi comentarii. Rezultate complete la `http://izho.kz/`.

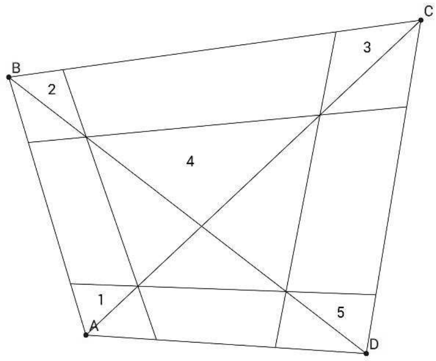


Figure for Problem 6.

$<$ spoiler $>$ Soluţii detaliate şi comentarii vin pe paginile următoare. Încercaţi să rezolvaţi problemele înainte de a merge mai departe.

First Day – Solutions

Problem 1. Points M, N, K lie on the sides BC, CA, AB respectively, of a triangle ABC, and are different from its vertices. The triangle MNK is called *beautiful* if the triangles MNK and ABC are similar (with the vertices respectively in this order). Show that if in the triangle ABC there are two beautiful triangles with a common vertex, then $\triangle ABC$ is right-angled.

Solution. (L. Ploscaru) Say MN_1K_1 and MN_2K_2 are such two beautiful triangles. Let $T = N_1K_1 \cap N_2K_2$; T exists, and belongs to the interior of $\triangle ABC$, since angles at M are equal to $\angle A$. Then $\angle N_1MN_2 = \angle K_1MK_2$. We then have $\angle MN_1T = \angle MN_2T = \angle B$ and $\angle MK_1T = \angle MK_2T = \angle C$. It follows that MN_2N_1T and MK_1K_2T are cyclic quadrilaterals.

So $\angle K_2K_1T = \angle K_2MT$ and $\angle AN_1T = \pi - \angle N_2N_1T = \angle N_2MT$, whence $\pi - \angle A = \angle AK_1N_1 + \angle AN_1K_1 = \angle K_2MN_2 = \angle A$, yielding $\pi - \angle A = \angle A$, so $\boxed{\angle A = \pi/2}$. Moreover, notice it **forces** M to be the midpoint M_0 of BC; conversely then, all triangles M_0NK with $\angle KM_0N = \pi/2$ are beautiful. ■

Comentarii. Ceea ce se numeşte, în "English mathematical parlance", "simple angle chasing". Reciproca merita şi ea a fi remarcată.

Problem 2. Do there exist? functions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

a) f is a surjective function; and
b) $f(f(x)) = (x-1)f(x) + 2$ for all x real.

Solution. We have $f(f(f(x))) = f\Big(f(f(x))\Big) = f((x-1)f(x)+2)$ and also $f(f(f(x))) = (f(x)-1)f(f(x))+2 = (f(x)-1)((x-1)f(x)+2)+2 = (f(x)-1)(x-1)f(x) + 2(f(x)-1)+2 = f(x)((f(x)-1)(x-1)+2)$, so

$$f((x-1)f(x)+2) = f(x)((x-1)f(x)+2-(x-1)).$$

Let $f(a) = 0$; then for $x = a$ we get $f(0) = 2$, and then for $x = 0$ we get $f(2) = 0$. Now for $x = 1$ we get $f(1) = 0$. Taking $f(b) = 1$ leads us to $b = -1$, and then to $f(-1) = 1$. Finally, taking $f(c) = -1$ leads to $c = 2$, but that means $0 = f(2) = -1$, absurd. Thus the answer is $\boxed{\text{No}}$. ■

Comentarii. Jonglerii cu valori particulare (mici), până la obţinerea unei contradicţii ... Important este că undeva pe parcurs trebuie exprimat $f(f(f(z)))$ în două feluri diferite, ceea ce este tipic pentru ecuaţii funcţionale conţinând iterata funcţiei.

Ar fi interesant de văzut în ce măsură putem relaxa condiţiile, sau ce fenomen se ascunde aici!?! Fără condiţia a) de surjectivitate, o soluţie banală este $f(0) = 2$, $f(x) = 0$ pentru $x \neq 0$. Putem oare găsi toate soluţiile?

Problem 3. There are given 100 distinct positive integers. We call a pair of integers among them *good* if the ratio of its elements is either 2 or 3. What is the maximum number g of good pairs that these 100 numbers can form? (A same number can be used in several pairs.)

Solution. Like so often in Russian problems, numbers are used instead of generic symbols. Let us therefore denote $10 = n > 1$, $2 = k > 1$, $3 = \ell > 1$, with the extra condition **both k and ℓ aren't powers of a same number**. Consider the digraph G whose set of vertices $V(G)$ is made of $v = n^2$ distinct positive integers, and whose set of edges $E(G)$ is made by the pairs $(a,b) \in V(G) \times V(G)$ with $a \mid b$. For each positive integer m consider now the (not induced) spanning subdigraph G_m of G (with $V(G_m) = V(G)$ and so $v_m = v = n^2$ vertices), and whose edges are the pairs $(a,b) \in G \times G$ with $b = ma$. Moreover, it is clear that $E(G_{m'}) \cap E(G_{m''}) = \emptyset$ for $m' \neq m''$ (since if $(a,b) \in E(G)$ then $(a,b) \in E(G_{b/a})$ only), and also $\bigcup_{m \geq 1} E(G_m) = E(G)$ (but that is irrelevant). Since the *good* pairs are precisely the edges of G_k and G_ℓ together, we need to maximize their number g.

A digraph G_m is clearly a union of some n_m disjoint (directed) paths $P_{m,i}$, with lengths $\lambda(P_{m,i}) = \lambda_{m,i}$, $0 \leq \lambda_{m,i} \leq n^2 - 1$, such that $\sum_{i=1}^{n_m} (\lambda_{m,i} + 1) = n^2$, and containing $e_m = \sum_{i=1}^{n_m} \lambda_{m,i}$ edges (zero-length paths, i.e. isolated vertices, are possible, allowed, and duly considered). The *defect* of the graph G_m is taken to be $v - e_m = n_m$. We therefore need to maximize $g = e_k + e_\ell$, or equivalently, to minimize the defect $\delta = n_k + n_\ell$.

Using the model $V(G) = V_x = \{k^{i-1}\ell^{j-1}x \mid 1 \leq i,j \leq n\}$, we have $n_k = n_\ell = n$, therefore $\delta = 2n$, so $\boxed{g = 2n(n-1)}$. To prove value $2n$ is a minimum for δ is almost obvious. We have $\lambda_{k,i} \leq n_\ell - 1$ for all $1 \leq i \leq n_k$ (by the condition on k and ℓ, we have $|P_{k,i} \cap P_{\ell,j}| \leq 1$ for all $1 \leq i \leq n_k$ and $1 \leq j \leq n_\ell$),[2] so $n^2 - n_k = e_k = \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_{k,i} \leq \sum_{i=1}^{n_k} (n_\ell - 1) = n_k n_\ell - n_k$, therefore $n^2 \leq n_k n_\ell$, and so $\delta = n_k + n_\ell \geq 2\sqrt{n_k n_\ell} = 2n$. Moreover, we see equality occurs if and only if $n_k = n_\ell = n$ and $\lambda_{k,i} = \lambda_{\ell,i} = n-1$ for all $1 \leq i \leq n$, thus only for the sets V_x described above. Răspunsul este deci $\boxed{g = 180}$. ■

Comentarii. Odată ce ideea vine, problema este aproape trivială, cu detaliile tehnice fiind aproape "forţate". Valorile particulare folosite aruncă doar un văl de umbră asupra situaţiei de fapt (mai ales ocultul $100 = 10^2$)! Laticea de divizibilitate a celor n^2 numere este considerată în mod natural, şi conduce la facila numărătoare de mai sus.

[2] Say $|P_{k,i} \cap P_{\ell,j}| \geq 2$; then take $a \mid b \in P_{k,i} \cap P_{\ell,j}$, so that $b = k^x a$ and $b = \ell^y a$. Then $k^x = \ell^y$, wlog with $\gcd(x,y) = 1$. Say $k = \prod_{i=1}^{s} p_i^{k_i}$ and $\ell = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\ell_i}$. Then for each $1 \leq i \leq s$ we have $p_i^{xk_i} = p_i^{y\ell_i}$, so $xk_i = y\ell_i$, therefore $x \mid \ell_i$ and $y \mid k_i$, with $k_i/y = \ell_i/x \in \mathbb{N}^*$. Let $r = \prod_{i=1}^{s} p_i^{k_i/y} = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\ell_i/x}$; then $k = r^y$ and $\ell = r^x$, in contradiction with the condition that both k and ℓ aren't simultaneously powers of a same number.

Second Day – Solutions

Problem 4. Does it exist? a polynomial $P(x)$ with integer coefficients, such that $P(1+\sqrt{3}) = 2+\sqrt{3}$ and $P(3+\sqrt{5}) = 3+\sqrt{5}$.

Solution. The answer is $\boxed{\text{No}}$. The polynomial $P(x)-x$ has root $3+\sqrt{5}$, and since it has integer coefficients, it also has root $3-\sqrt{5}$. The quadratic having these two roots is x^2-6x+4. Therefore $P(x)-x = (x^2-6x+4)Q(x)$ for some polynomial $Q(x)$ with integer coefficients. Plugging in $x = 1+\sqrt{3}$ we find $1 = (2-4\sqrt{3})Q(1+\sqrt{3})$. From known conjugates properties we also do have $1 = (2+4\sqrt{3})Q(1-\sqrt{3})$, so (multiply) $1 = -44Q(1+\sqrt{3})Q(1-\sqrt{3})$, impossible, since again by the properties of conjugates

$$Q(1+\sqrt{3})Q(1-\sqrt{3}) = Q(1+\sqrt{3})Q(\overline{1+\sqrt{3}}) = Q(1+\sqrt{3})\overline{Q(1+\sqrt{3})}$$

must be some integer k, and we cannot have $1 = -44k$. ■

Comentarii. Simple consideraţii legate de rădăcinile conjugate ale unor iraţionale pătratice pentru un polinom cu coeficienţi întregi. Multiple soluţii, bazate toate pe aceste proprietăţi, sunt posibile, iar problema este de o tehnicalitate elementară şi artificială.

Problem 5. Let $U = \{1,2,3,\ldots,2014\}$. For all $a,b,c \in \mathbb{N}$ let $f(a,b,c)$ be the number of ordered sextuplets $(X_1,X_2,X_3,Y_1,Y_2,Y_3)$ of subsets of U, satisfying the following conditions

(i) $Y_1 \subseteq X_1 \subseteq U$ and $|X_1| = a$;
(ii) $Y_2 \subseteq X_2 \subseteq U \setminus Y_1$ and $|X_2| = b$;
(iii) $Y_3 \subseteq X_3 \subseteq U \setminus (Y_1 \cup Y_2)$ and $|X_3| = c$.

Prove $f(\sigma(a),\sigma(b),\sigma(c))$ does not change, for permutations σ of a, b, c.

Solution. In order to avoid any confusion between the letters a,b,c and their numerical values (as cardinalities of sets), the most convenient way will be to denote by $|\ell|$ the cardinality symbolized by any such letter ℓ. We can now consider the true 3-element set $\{a,b,c\}$, and the canonical bijection $\phi\colon \{1,2,3\} \to \{a,b,c\}$ given by $\phi(1) = a$, $\phi(2) = b$, $\phi(3) = c$.

Let us now consider any permutation σ of $\{a,b,c\}$. We will denote by $\mathcal{F}_\sigma$ the family of ordered sextuplets $(X_1,X_2,X_3,Y_1,Y_2,Y_3)$ of subsets of U satisfying the conditions of the statement but, under our notations, having $|X_1| = |\sigma(a)|$, $|X_2| = |\sigma(b)|$, $|X_3| = |\sigma(c)|$. We will also denote by $\mathcal{F}$ the family of doubletons $\{(X_a,X_b,X_c),Y\}$, with X_a,X_b,X_c subsets of U having $|X_a| = |a|$, $|X_b| = |b|$, $|X_c| = |c|$, and $\emptyset \subseteq Y \subseteq X = X_a \cup X_b \cup X_c$. The set Y uniquely partitions into 7 classes (some of them maybe empty), indexed by the non-empty subsets S of $\{a,b,c\}$ via $Y_S = Y \cap \left(\bigcap_{\ell\in S} X_\ell\right) \cap \left(\bigcap_{\ell\notin S} (U\setminus X_\ell)\right)$.

We will now establish a bijection between $\mathcal{F}$ and $\mathcal{F}_\sigma$. This will show that $\boxed{f(\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c)) = |\mathcal{F}| \text{ is constant over all permutations } \sigma}$. We send an element $\{(X_a, X_b, X_c), Y\} \in \mathcal{F}$ into the sextuplet $(X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3)$ given by, and easily verified it actually belongs to $\mathcal{F}_\sigma$,

- $X_1 = X_{\sigma(a)}$, $X_2 = X_{\sigma(b)}$, $X_3 = X_{\sigma(c)}$ (i.e. $X_i = X_{\sigma(\phi(i))}$ for $i \in \{1, 2, 3\}$),
- $Y_1 = Y_{\{\sigma(a)\}}$,
- $Y_2 = Y_{\{\sigma(b)\}} \cup Y_{\{\sigma(a),\sigma(b)\}}$,
- $Y_3 = Y_{\{\sigma(c)\}} \cup Y_{\{\sigma(a),\sigma(c)\}} \cup Y_{\{\sigma(b),\sigma(c)\}} \cup Y_{\{\sigma(a),\sigma(b),\sigma(c)\}}$.

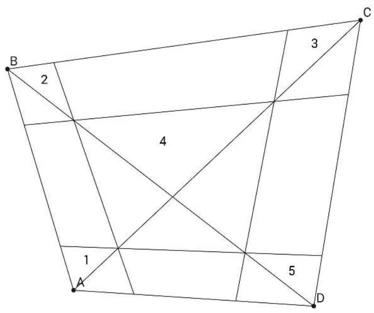
We also send an element $(X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3) \in \mathcal{F}_\sigma$ into the doubleton $\{(X_a, X_b, X_c), Y\}$ given by, and easily verified it actually belongs to $\mathcal{F}$, with τ the permutation of $\{1, 2, 3\}$ induced by σ via $\tau(i) = \phi^{-1}(\sigma(\phi(i)))$ for all $i \in \{1, 2, 3\}$,

- $X_a = X_{\tau(1)}$, $X_b = X_{\tau(2)}$, $X_c = X_{\tau(3)}$ (i.e. $X_{\phi(i)} = X_{\tau(i)}$ for $i \in \{1, 2, 3\}$),
- $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$.

It is immediate to see this mapping is a bijection, due to the unicity of the partitioning described in the above. Visualizing the Venn diagrams should tremendously help in understanding our considerations. The only difficulty resides in providing a luminous write-up of the argumentation, the underlying phenomenon being in fact almost trivial. The key element of this solution is to consider the unique partitioning of the set $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ induced by the three sets of cardinalities a, b, c. ■

Comentarii. Pouah ... ce urâţenie de enunţ! Iar cerinţa este aproape evidentă, doar că soluţia este cam lung de scris, formalizat, şi explicat. Evident, valoarea 2014 nu joacă niciun rol.

Problem 6. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral, partitioned by four lines as in the picture below, such that the meeting points of these lines all lie on the diagonals of $ABCD$. Prove that if the corner quadrilaterals $1, 2, 3$ and the center quadrilateral 4 are all tangential, then the corner quadrilateral 5 is also tangential.



Solution. It seems the corner quadrilateral 5 is tangential if and only if quadrilateral $ABCD$ is itself tangential; but no progress is thus yet made. Not being a geometer, I will wait for a decent solution to present itself (and it did! – see the presentation on the last page). ■

Comentarii Finale.

Au participat 57 de echipe, cu 368 de participanţi din 16 ţări (pentru trei discipline), printre care Bielorusia, Bulgaria, India, Indonezia, Kazahstan, Mongolia, Rusia, România (C. N. Tudor Vianu), Serbia, Ucraina.

Rezultatele delegaţiei din România (C. N. Tudor Vianu)

Disciplina	**Nume**	**Rezultat**
Matematică	Irina Cristali	2/42
	Lucian Niţă	1/42
	Horia Banciu	1/42
Fizică	Cristian Duţescu	7,6/40
	Bogdan Cionca	7,5/40
Informatică	Petru-Eric Stavarache	495/600 **Aur**
	Alexandru Văleanu	334/600 Bronz

Echipa s-a clasat pe locul 22/57 (mulţumită – de departe – rezultatelor de la Informatică – rezultatele de la Matematică au fost dezamăgitor de slabe; cu atât mai caraghios este faptul că ambii profesori însoţitori au fost aleşi de la această disciplină)!

Marele Premiu a fost luat de echipa din Moscova. La Matematică au existat două punctaje perfecte **42/42**, ambele din Rusia. Nici problemele, nici cu atât mai puţin soluţiile oficiale, nu au fost afişate, dar lista completă a participanţilor şi rezultatele finale pot fi găsite la `http://izho.kz/2014/`.

Următorul concurs internaţional este **7th Master of Mathematics 2014** găzduit chiar de C. N. Tudor Vianu! Site-ul oficial `http://rmms.lbi.ro/` încă nu face anunţul concursului, care ar trebui să se desfăşoare în perioada 26 februarie – 3 martie 2014, dar probleme logistice ar putea să-i pună în pericol fragila sa existenţă ... Să ne bucurăm deci că **3rd EGMO 2014** este în bună stare de sănătate şi se va desfăşura în perioada 10 – 16 aprilie 2014 (imediat după Etapa Naţională a Olimpiadei de Matematică de la Cluj), în Antalia, Turcia – site oficial `https://www.egmo.org/egmos/egmo3/` (vezi anunţurile deja postate pe `http://www.viitoriolimpici.ro/`).

În ultimul moment, am intrat în posesia soluţiilor oficiale (curtoazie Ionuţ Onişor). Paginile următoare conţin comentarii suplimentare (generate de aceste soluţii), soluţia oficială la Problema 6, şi câteva statistici referitoare la rezultatele secţiunii Matematică a concursului.

Dan Schwarz, 21 ianuarie 2014

Statistici asupra punctajelor, pe probleme.

Problema/Puncte	7	6	5	4	3	2	1	0	Medie
P1	115	0	1	4	1	1	8	41	4,9
P2	78	0	0	1	2	3	25	103	3,4
P3	14	3	5	0	0	4	22	123	1,0
P4	60	7	4	2	0	0	5	93	2,9
P5	14	2	3	1	0	0	24	127	0,9
P6	7	1	0	0	2	0	6	155	0,4

După cum am menţionat mai sus, au fost 2 scoruri perfecte de 42/42, din Rusia. Cele 7 scoruri maxime la problema 6 au fost şi ele toate din Rusia. Ziua a doua s-a dovedit **mult** mai grea decât prima. S-au acordat 18 medalii de aur (42-29 puncte), 23 medalii de argint (28-22 puncte) şi 32 medalii de bronz (21-15 puncte); în total 73 de medalii pentru 171 de participanţi, mult mai puţin decât proporţia de 50% aplicată de obicei (din cele ce văd, s-au aplicat mai degrabă ”medal cut-offs” cele mai frecvente de la OIM, şi nu procentajele; probabil datorită nivelului scăzut al celor mai mulţi dintre concurenţi – comparativ cu nivelul problemelor date spre rezolvare).

Comentarii Suplimentare.

Problema 1. Autorii nu atrag atenţia că vârful comun a două triunghiuri *frumoase* va fi cu trebuinţă mijloc de latură, şi că atunci orice triunghi dreptunghic de acest vârf este frumos.

Problema 2. Şi autorii consideră posibilitatea ca f să **nu** fie surjectivă, şi oferă atât exemplul dat şi de mine, cât şi exemplul $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$ pentru $x \neq 1$, $f(1) = 0$. Dar nici ei nu consideră chestiunea găsirii **tuturor** soluţiilor pentru acest caz (tsk, tsk, Igor Voronovich ...).

Problema 3. Soluţia oficială a Problemei 3 o reformulează astfel

> Fiind dat un număr de $100 = n^2$ puncte laticiale, care este numărul maxim de perechi dintre aceste puncte, aflate la distanţă 1 unul de celălalt?

Echivalenţa celor două enunţuri se face prin corespondenţa $(i, j) \mapsto 2^i 3^j$ pentru punctele laticiale date; invers, pentru numerele întregi date, fiecare astfel de număr b se poate scrie $b = 2^i 3^j a$, cu $i, j \geq 0$ şi $\text{cmmdc}(a, 6) = 1$. Acum, pentru fiecare valoare a, facem corespondenţa $2^i 3^j a \mapsto (i+u_a, j+v_a)$, unde u_a, v_a sunt alese astfel încât pentru $a \neq a'$ să nu avem puncte de tipul $(i + u_a, j + v_a)$ la distanţă 0 sau 1 de puncte de tipul $(i' + u_{a'}, j' + v_{a'})$.

Se demonstrează apoi că numărul maxim de perechi dintre cele n^2 puncte laticiale, cu puncte aflate la distanţă 1 unul de celălalt, se obţine când punctele formează un pătrat de latură n; metoda este practic identică celei folosite de mine, în contextul uşor diferit al raţionamentului meu.

De remarcat că această soluţie foloseşte din plin faptul că 2 şi 3 sunt numere prime – iarăşi, soluţia nu mai merge pentru valori k şi ℓ ca cele folosite de mine, căci atunci factorizarea unui număr b ca $b = k^i \ell^j a$ nu mai este neapărat unică, şi corespondenţa cu puncte laticiale este primejduită. Mai mult, nici măcar faptul că lucrăm cu n^2 numere nu este chiar esenţial; aceleaşi raţionamente funcţionează pentru un număr N, cu valoarea optimă fiind în acest caz $\lfloor 2\sqrt{N}(\sqrt{N} - 1) \rfloor$, valoarea particulară $N = n^2$ permiţând doar exprimarea rezultatului într-o formă simplă.

Problema 4. Soluţia oficială este inutil de complicată, dar ideea merită menţionată. Pentru orice polinom $P \in \mathbb{Z}[x]$, numerele întregi a, b, c, d pentru care $P(1 + \sqrt{3}) = a + b\sqrt{3}$ şi $P(3 + \sqrt{5}) = c + d\sqrt{5}$ sunt evident unic determinate. Numim polinomul *regulat* dacă $a - c \equiv b - d \equiv 0 \pmod 2$. Se arată uşor apoi că dacă P şi Q sunt polinoame regulate, atunci atât orice combinaţie liniară cu coeficienţi întregi $kP + \ell Q$, cât şi produsul PQ sunt polinoame regulate. Dar deoarece polinomul constant $\mathbf{1}(x) = 1$ şi polinomul $\mathbf{X}(x) = x$ sunt regulate, şi deoarece $\mathbf{1}$ şi $\mathbf{X}$ generează inelul $\mathbb{Z}[x]$, rezultă că orice polinom $P \in \mathbb{Z}[x]$ este regulat; polinomul cerut nu este însă regulat, căci $a - c = -1 \not\equiv 0 \pmod 2$. Îl bănuiesc pe Alexander Golovanov ca făptaş la acest efort ... de altfel meritoriu, dar vezi comentariul care urmează relativ la adevărata sa valoare. Artificiul este însă de reţinut, folositor poate pentru alte instanţe asemănătoare.

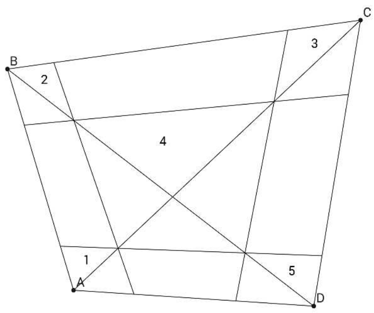
Deşi metoda este elegantă, dacă am fi avut însă $P(1 + \sqrt{3}) = 3 + \sqrt{3}$, polinomul ar fi fost regulat, şi soluţia de mai sus nu mai ţine, în timp ce "banala" soluţie cu conjugate conduce la relaţia imposibilă $4 = -44k$. După mine, acest fenomen este echivalent cu o notă de uşor ridicul ... o soluţie sofisticată, dar care funcţionează în (mult) mai puţine cazuri decât soluţia "mitocănească".

Problema 5. Soluţia oficială asociază fiecărui sextuplet (care satisface condiţiile) $(X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3)$ şirurile $A = (a_i)_{1 \le i \le 2014}, B = (b_i)_{1 \le i \le 2014}$, $C = (c_i)_{1 \le i \le 2014}$, definite prin $a_i = 2$ dacă $i \in Y_1$, $a_i = 1$ dacă $i \in X_1 \setminus Y_1$, şi $a_i = 0$ altfel; la fel şirurile B (pentru indicele 2) şi C (pentru indicele 3). Sunt apoi interpretate cele trei condiţii din enunţ – în termeni relativi la aceste şiruri, şi se stabileşte că $f(a, b, c)$ este numărul de triplete (A, B, C) cu aceste proprietăţi.

Finalmente, sunt descrise bijecţii Φ între tripletele corespunzând ordinii (a, b, c) şi cele corespunzând ordinii (b, a, c), ducând la $f(a, b, c) = f(b, a, c)$, şi Ψ între tripletele corespunzând ordinii (a, b, c) şi cele corespunzând ordinii (a, c, b), ducând la $f(a, b, c) = f(a, c, b)$, şi aceasta este deajuns.

De fapt, şirurile A, B, C sunt un fel de extensie a funcţiilor *indicatoare*; de exemplu A este secvenţa valorilor unei funcţii indicatoare a sistemului de mulţimi $Y_1 \subseteq X_1 \subseteq U$. Cu toate acestea, metoda este extrem de artificială şi ne-intuitivă – comparată cu ideea demonstraţiei date de mine. Verificarea transformărilor date de Φ şi Ψ este delicată, arătând că alegerea şirurilor a fost făcută – cum se zice – ”cu mintea omului cea de pe urmă”.

Problema 6. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral, partitioned by four lines as in the picture below, such that the meeting points of these lines all lie on the diagonals of $ABCD$. Prove that if the corner quadrilaterals $1, 2, 3$ and the center quadrilateral 4 are all tangential, then the corner quadrilateral 5 is also tangential.



Official Solution. We use the following

LEMMA.[3] A convex quadrilateral $XYZT$ is tangential if and only if

$$\tan \frac{1}{2}\angle YXZ \cdot \tan \frac{1}{2}\angle TZX = \tan \frac{1}{2}\angle YZX \cdot \tan \frac{1}{2}\angle TXZ.$$

Proof. From what I see, a simple derivation from Pitot's theorem, which equivalates the tangentiality of $XYZT$ with $XY + ZT = YZ + TX$. □

Applying the Lemma to quadrilaterals 1, 4 and 3 shows that quadrilateral $ABCD$ is tangential. Applying again the Lemma to quadrilaterals 2, 4 and $ABCD$ shows that quadrilateral 5 is tangential.

In other words, if the inner/outer quadrilateral, and any three of the corner quadrilaterals are tangential, so will be the outer/inner one, and the remaining fourth corner quadrilateral; the configuration is symmetric. ■

Să remarcăm că celelalte patru patrulatere prezente în figură nu sunt neapărat circumscriptibile (dar pot fi). Am o oarecare bănuială că această LEMĂ ar fi putut fi arhicunoscută în anumite cercuri (Rusia este o forţă în geometria sintetică de olimpiade). *Enough said ...*

D. S. 22 ianuarie 2014

[3]O cercetare pe Internet îmi descoperă că această LEMĂ este de fapt cunoscută ca rezultat al lui M. Iosifescu, G.M.-B (1953-1954)! vezi
`http://en.wikipedia.org/wiki/Tangential_quadrilateral/` (wiki) şi/sau
`http://forumgeom.fau.edu/FG2011volume11/FG201108.pdf` (pages 75-77).