SOLUŢIE

Problema 4

Arătaţi că pentru orice număr natural $n \geqslant 2$ are loc egalitatea
$[\sqrt{n}] + [\sqrt[3]{n}] + [\sqrt[4]{n}] + \ldots + [\sqrt[n]{n}] = [\log_2 n] + [\log_3 n] + \ldots + [\log_n n]$.

Kvant

Soluţie. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Notăm $N = \{k \in \mathbb{N} \mid 2 \leqslant k \leqslant n\}$.
Vom număra în două moduri elementele mulţimii

$$M = \{(x, y) \in N \times N \mid x^y \leqslant n\}.$$

În primul rând, partiţionăm mulţimea M astfel:

$$M = A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n,$$

unde $A_k = \{(x, k) \in N \times N \mid x^k \leqslant n\}$, pentru $k \in N = \{2, 3, \ldots n\}$.

Deoarece $(x, k) \in A_k$ dacă şi numai dacă $2 \leqslant x \leqslant \sqrt[k]{n}$ şi $x \in \mathbb{N}$, obţinem $\text{card}(A_k) = [\sqrt[k]{n}\,] - 1$. Cum $\text{card}(M) = \sum\limits_{k=2}^{n} \text{card}(A_k)$, rezultă

$$\text{card}(M) = [\sqrt{n}\,] + [\sqrt[3]{n}\,] + \ldots + [\sqrt[n]{n}\,] - n + 1. \tag{1}$$

În al doilea rând, partiţionăm mulţimea M astfel:

$$M = B_2 \cup B_3 \cup \ldots \cup B_n,$$

unde $B_k = \{(k, y) \in N \times N \mid k^y \leqslant n\}$, pentru $k \in N = \{2, 3, \ldots n\}$.

Deoarece $(k, y) \in B_k$ dacă şi numai dacă $2 \leqslant y \leqslant \log_k n$ şi $y \in \mathbb{N}$, obţinem $\text{card}(B_k) = [\log_k n\,] - 1$. Cum $\text{card}(M) = \sum\limits_{k=2}^{n} \text{card}(B_k)$, rezultă

$$\text{card}(M) = [\log_2 n\,] + [\log_3 n\,] \ldots + [\log_n n\,] - n + 1. \tag{2}$$

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă identitatea cerută.