Problema 4. Determinați numerele naturale a şi b astfel încât 1+s(a)+s(b)+s(ab)=(a+2)(b+2) şi [a,b]+(a,b)+s(a)=2066, unde cu s(a) am notat suma divizorilor lui a, [a,b]=c.m.m.m.c.(a,b), (a,b)=c.m.m.d.c.(a,b).

Soluție:

Cazul 1. $a \neq b$, $a,b \geq 1$

Avem s(a)$\geq$1+a, s(b)$\geq$1+b, s(ab)$\geq$1+a+b+ab, deci 1+s(a)+s(b)+s(ab)$\geq$4+2a+2b+ab=(a+2)(b+2). Egalitatea are loc când s(a)=1+a, s(b)=1+b, s(ab)=1+a+b+ab, deci când a şi b sunt numere prime distincte. Atunci avem [a,b]=ab şi (a,b)=1, deci ab+1+a+1=2066, sau a(b+1)=2064, de unde obținem a=43,b=47 sau a=2,b=1031.

Cazul II: $a = b$

Relația din ipoteză devine $1+2s(a)+s(a^2)=a^2+4a+4$.

Dacă a este număr prim, atunci:

$1+2s(a)+s(a^2)=1+2+2a+1+a+a^2=a^2+3a+4<a^2+4a+4$, deci nu verifică ipoteza.

Dacă a este compus considerăm două subcazuri:

a) $a=d^2$, unde d este număr prim

În acest caz avem $1+2(1+d+d^2)+1+d+d^2+d^3=d^4+4d^2+4 \Leftrightarrow d^3-d^2+d-3=0$, ecuație care nu are soluție în mulțimea numerelor prime.

b) $a \neq d^2$, unde d este număr prim

Atunci a are un divizor m şi $\frac{a}{m}$ este şi el un divizor al lui a.

Deci vom obține:

$$1+2s(a)+s(a^2)>1+2\left(1+m+\frac{a}{m}+a\right)+1+a+a^2=4+3a+a^2+2\left(m+\frac{a}{m}\right)>a^2+4a+4$$

şi se contrazice ipoteza.

Cazul III: a=1 sau b=1

Nu avem soluție.