Etapa 6, Problema 1

Patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil iar $AKDL$ şi $CMBN$ sunt romburi având laturile egale. Arătaţi că punctele K, L, M şi N sunt conciclice.

***

Soluție.

Notăm cu O centrul cercului circumscris patrulaterului $ABCD$ şi fie I, J mijloacele laturilor AD, respectiv BC. Punctul O se află atât pe dreapta KL, cât şi pe dreapta MN, întrucât aceste drepte sunt mediatoare ale laturilor patrulaterului. Atunci:

K, L, M şi N sunt conciclice $\Leftrightarrow OK \cdot OL = OM \cdot ON \Leftrightarrow \left(OI - IK\right)\left(OI + IK\right) =$
$= \left(OJ - JM\right)\left(OJ + JM\right) \Leftrightarrow OI^2 - \left(AK^2 - AI^2\right) = OJ^2 - \left(BM^2 - BJ^2\right) \Leftrightarrow OI^2 + AI^2 =$
$= OJ^2 + BJ^2 \Leftrightarrow OA^2 = OB^2$,

iar această ultimă egalitate este, evident, adevărată.