Etapa 1, Problema 3

Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu proprietatea că $b_n \geq 1$, pentru orice $n \geq 1$. Demonstraţi că

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \lg b_k}{n} \leq \lg \frac{b_1 + b_n}{2}$$

pentru orice număr natural nenul n.

***

Soluţie.

Dacă notăm $a_n = \lg b_n$, pentru $n \geq 1$, şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ devine progresie aritmetică. Atunci

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \lg b_k}{n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{\lg b_1 + \lg b_n}{2},$$

iar

$$\frac{\lg b_1 + \lg b_n}{2} \leq \lg \frac{b_1 + b_n}{2},$$

din concavitatea funcţiei logaritm zecimal.

Soluţie alternativă.

Dacă q este raţia progresiei $(b_n)_{n\geq 1}$, inegalitatea de demonstrat revine succesiv la

$$\frac{\lg\left(b_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)}{n} \leq \lg \frac{b_1 \cdot \left(1 + q^{n-1}\right)}{2} \iff \frac{n \lg\left(b_1 \cdot q^{\frac{n-1}{2}}\right)}{n} \leq \lg \frac{b_1 \cdot \left(1 + q^{n-1}\right)}{2}$$

$$\iff b_1 \cdot q^{\frac{n-1}{2}} \leq \frac{b_1 \cdot \left(1 + q^{n-1}\right)}{2} \iff 2q^{\frac{n-1}{2}} \leq 1 + q^{n-1} \iff \left(q^{\frac{n-1}{2}} - 1\right)^2 \geq 0,$$

iar aceasta ultimă inegalitate este, evident, adevărată. Egalitatea se atinge atunci când $q = 1$.