

Clasa a X-a - Etapa 3

Problema 3. Pe laturile paralelogramului $ABCD$ se construiesc în exterior, pătrate. Demonstrați că centrele acestor pătrate formează un pătrat.

Soluție. Considerăm originea sistemului în centrul paralelogramului. Notăm toate afixele cu litere mici, analoge literelor mari. Atunci $c = -a$ și $d = -b$. Din $k + d = a + l$ și $l + ik - a - id = 0$, avem $l = -ia + (1 + i)d$. De aici

$$t = \frac{l + a}{2} = \frac{(1 - i)a + (1 + i)d}{2}.$$

Analog $x = \frac{(1 - i)b + (1 + i)a}{2}$, $y = \frac{(1 - i)c + (1 + i)b}{2}$ și $z = \frac{(1 - i)d + (1 + i)c}{2}$. Dar

$$t + y = \frac{(1 - i)(a + c) + (1 + i)(b + d)}{2} = 0$$

și $x + z = 0$, deci $x + z = y + t$. Apoi $x + iy - z - it = 0$, ceea ce trebuia demonstrat.