Clasa a X-a - Problema 4

Enunț: *Se consideră un triunghi ascuțitunghic ABC. Construim șirul de triunghiuri $(A_nB_nC_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $A_0B_0C_0 = ABC$ iar pentru triunghiul $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$, măsurile unghiurilor sale sunt definite prin $\widehat{A_{n+1}} = \frac{\pi - \widehat{A_n}}{2}$, $\widehat{B_{n+1}} = \frac{\pi - \widehat{B_n}}{2}$, $\widehat{C_{n+1}} = \frac{\pi - \widehat{C_n}}{2}$ iar raza cercului circumscris R_{n+1} este egală cu $\sqrt{2R_nr_n}$, unde R_n, r_n sunt raza cercului circumscris, respectiv înscris triunghiului $A_nB_nC_n$. Să se arate că:*

a) Dacă S_n reprezintă aria triunghiului $A_nB_nC_n$, atunci șirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este constant;

b) *Să se demonstreze că șirul $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător.*

Soluție:

Soluție: Fie p_n semiperimetrul triunghiului $A_nB_nC_n$. Avem în continuare

$$a_{n+1} = 2R_{n+1}\sin A_{n+1} = 2\sqrt{2R_nr_n}\cos\frac{A_n}{2} = 2\sqrt{2\frac{a_nb_nc_n}{4S_n}\cdot\frac{S_n}{p_n}}\cdot\sqrt{\frac{p_n(p_n-a_n)}{b_nc_n}}$$

$$= \sqrt{a_n(2p_n-2a_n)} = \sqrt{a_n(b_n+c_n-a_n)}, \text{ deci } a_{n+1} = \sqrt{a_n(b_n+c_n-a_n)} \text{ și analoagele.}$$

a) Avem $S_{n+1} = \frac{1}{2}b_nc_n\sin A_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{b_n(a_n+c_n-b_n)}\sqrt{c_n(a_n+b_n-c_n)}\cos\frac{A_n}{2}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{b_n(a_n+c_n-b_n)}\sqrt{c_n(a_n+b_n-c_n)}\sqrt{\frac{p_n(p_n-a_n)}{b_nc_n}} = S_n \text{ deci șirul } S_n \text{ este constant.}$$

b) $a_{n+1} = \sqrt{a_n(b_n+c_n-a_n)} \le \frac{a_n+b_n+c_n-a_n}{2} = \frac{b_n+c_n}{2}$ și analoagele. Prin însumare deducem că $a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1} \le a_n+b_n+c_n$ deci șirul $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător. Cum $S_n = p_nr_n$ atunci șirul $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător.