

Problema 4. Demonstrați că oricum am colora numerele naturale cu două culori, roșu și albastru (fiecare număr fiind colorat cu una din cele două culori), există trei numere naturale a, b, c de aceeași culoare astfel încât $a = \frac{b+c}{2}$.

Soluție: Presupunem că nu există a, b, c ca în enunț. Arătăm mai întâi că există $n > 5$ astfel încât n și $n+1$ să aibă aceeași culoare. În caz contrar, culorile ar alterna și 5, 7, 9 ar avea aceeași culoare, iar $7 = \frac{5+9}{2}$.

Fie $n > 5$ și $n+1$ două numere de aceeași culoare, să zicem roșie; atunci $n-1$ și $n+2$ trebuie să fie albastre. Atunci $n-4$ și $n+5$ sunt roșii, apoi $n-3$ și $n+4$ sunt albastre. Dar $n+3$ este media aritmetică a numerelor $n+2$ și $n+4$ care sunt albastre dar și media aritmetică a numerelor $n+1$ și $n+5$ care sunt roșii, contradicție.