Problema 1. Demonstraţi că dacă $a, b, c > 0$ sunt numere reale, atunci are loc inegalitatea

$$\frac{a^2}{bc(b+c)} + \frac{b^2}{ca(c+a)} + \frac{c^2}{ab(a+b)} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Vasile Peiţa

Soluţie:

Pentru demonstraţie se folosesc: inegalitatea lui Bergström:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}, \qquad \forall\, a, b, c, x, y, z > 0 \qquad (1)$$

dubla inegalitate

$$ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2 \qquad (2)$$

care se demonstrează uşor (ambele inegalităţi revin la $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$) şi

$$abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{27} \qquad (3)$$

care rezultă din inegalitatea mediilor.

Amplificând fracţiile cu a^2, b^2, respectiv c^2, obţinem:

$$\frac{a^2}{bc(b+c)} + \frac{b^2}{ca(c+a)} + \frac{c^2}{ab(a+b)} = \frac{a^4}{abc(ab+ac)} + \frac{b^4}{abc(bc+ba)} + \frac{c^4}{abc(ca+cb)} \overset{(1)}{\geq}$$

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2abc(ab+bc+ca)} \overset{(2),(3)}{\geq} \frac{\dfrac{(a+b+c)^4}{9}}{2 \cdot \dfrac{(a+b+c)^3}{27} \cdot \dfrac{(a+b+c)^2}{3}} = \frac{81(a+b+c)^4}{18(a+b+c)^5} =$$

$$\frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Egalitate avem dacă şi numai dacă $a = b = c$.

Remarcă: Pare tentant să încercăm să aplicăm inegalitatea (1) direct:

Avem $\dfrac{a^2}{bc(b+c)} + \dfrac{b^2}{ca(c+a)} + \dfrac{c^2}{ab(a+b)} \overset{(1)}{\geq} \dfrac{(a+b+c)^2}{a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b} \overset{?}{\geq}$ $\dfrac{9}{2(a+b+c)}$, deci ar fi suficient să demonstrăm inegalitatea marcată cu „?”.

Aceasta revine la $2(a+b+c)^3 \geq 9(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)$, care însă este falsă (de exemplu pentru $a = b = 1$, $c = 0,1$ ea revine la $18,522 \geq 19,98$, evident fals).

Soluţie alternativă („brute force”):
Se elimină numitorii şi, cu notaţiile clasice pentru sume Muirhead,

$$[\alpha, \beta, \gamma] = \sum_{cicl.} a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma},$$

inegalitatea din enunţ se rescrie echivalent:

$$[6, 0, 0] + 4[5, 1, 0] + 2[4, 2, 0] + 3[4, 1, 1] \geq 7[3, 2, 1] + 3[2, 2, 2],$$

care este imediat din inegalitatea lui Muirhead.