Lecție pentru clasa a VII-a - a VIII-a,
Andra Iuliana Oprea, clasa a IX-a

# Metoda UVW (pentru clasele VII - VIII)

- Oprea Andrea - Iuliana, clasa a IX-a
Colegiul Național „Ion C. Brătianu”, Pitești, Argeș
Profesor: Ulmeanu Sorin

## 1. Concepte de bază:

Într-o inegalitate cu nr. $a, b, c \in \mathbb{R}$, scriem totul ca $3u = a+b+c$, $3v^2 = ab+bc+ca$, $w^3 = abc$. Cum condiția $a, b, c \geq 0$ este prezentă în majoritatea inegalităților, putem spune că $u, v^2, w^3 \geq 0$. În caz contrar, există posibilitatea ca $u, v^2, w^3$ să fie nr. negative.

Observație: Uneori, $v^2$ poate să fie negativ ($a=-1, b=-2, c=3 \Rightarrow 3v^2 = -7$).

Teorema „idiotului”: $u \geq v \geq w$, unde $a, b, c \geq 0$ și $u, v, w \geq 0$.

Demonstrație: $9u^2 - 9v^2 = a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}\sum_{cyc}(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow u \geq v \xRightarrow{ma \geq mg}$

$$v^2 = \frac{ab+bc+ca}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = w^2 \Rightarrow v \geq w \Rightarrow u \geq v \geq w.$$

Teorema UVW: Fie $u, v^2, w^3$ numere reale. Următoarele afirmații sunt echivalente.

1. Există $a, b, c$ astfel încât $\begin{cases} 3u = a+b+c \\ 3v^2 = ab+bc+ca \\ w^3 = abc \end{cases}$

2. $u^2 \geq v^2$ și $w^3 \in \left[3uv^2 - 2u^3 - 2\sqrt{(u^2-v^2)^3},\ 3uv^2 - 2u^3 + 2\sqrt{(u^2-v^2)^3}\right]$.

Demonstrație: Definim $f(t) = t^3 - 3ut^2 + 3v^2t - w^3$. Fie $a, b, c$ rădăcinile sale. Din relațiile lui Viète obținem $3u = a+b+c$, $3v^2 = ab+bc+ca$, $w^3 = abc$.

Lema 1: $a, b, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (a-b)(b-c)(c-a) \in \mathbb{R}$

Demonstrație: Este evident că $a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a) \in \mathbb{R}$. Astfel, vom arăta că $a, b, c \notin \mathbb{R} \Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a) \notin \mathbb{R}$. Fie $z \notin \mathbb{R}$ un număr complex astfel încât $f(z) = 0$. Atunci, $f(\bar{z}) = \overline{f(z)} = \bar{0} = 0$, deci, $\bar{z}$ este o rădăcină complexă în $f(z)$. Datorită simetriei putem presupune, fără a restrânge generalitatea problemei, că $a = z$, $b = \bar{z}$. Atunci, $(a-b)(b-c)(c-a) = -(z-\bar{z})|z-c|^2 \notin \mathbb{R}$. Aceasta reiese din $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$, $i(z-\bar{z}) \in \mathbb{R}$, și $|z-c|^2 \in \mathbb{R}$.

Este evident că $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 \in [0, +\infty)$. Deci, există $a, b, c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $3u = a+b+c$, $3v^2 = ab+bc+ca$, $w^3 = abc$ dacă și numai dacă $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0$, unde $a, b, c$ sunt rădăcinile funcției $f(t)$.

Dar $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = 27\left(-(w^3-(3uv^2-2u^3))^2 + 4(u^2-v^2)^3\right) \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4(u^2-v^2)^3 \geq (w^3-(3uv^2-2u^3))^2$. Din aceasta, vom avea nevoie de $u^2 \geq v^2$. Dar $4(u^2-v^2)^3 \geq (w^3-(3uv^2-2u^3))^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{(u^2-v^2)^3} \geq |w^3-(3uv^2-2u^3)|$.

Pentru $w^3 \geq (3uv^2-2u^3) \Leftrightarrow w^3 \leq 3uv^2 - 2u^3 + 2\sqrt{(u^2-v^2)^3}$

Pentru $w^3 \leq (3uv^2-2u^3) \Leftrightarrow w^3 \geq 3uv^2 - 2u^3 + 2\sqrt{(u^2-v^2)^3}$

Deci, $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0 \iff w^3 \in [3uv^2-2u^3,\ 3uv^2-2u^3+2\sqrt{(u^2-v^2)^3}] \cap$

$\cap [3uv^2-2u^3-2\sqrt{(u^2-v^2)^3},\ 3uv^2-2u^3] \iff$

$\iff w^3 \in [3uv^2-2u^3-2\sqrt{(u^2-v^2)^3};\ 3uv^2-2u^3+2\sqrt{(u^2-v^2)^3}]$ şi $u^2 \geq v^2$

Teorema pozitivității: $a, b, c \geq 0 \iff u, v^2, w^3 \geq 0$

Demonstrație: Cazul $a, b, c \geq 0 \Rightarrow u, v^2, w^3 \geq 0$ este evident.

Demonstrăm că $a<0$ sau $b<0$ sau $c<0 \Rightarrow u<0$ sau $v^2<0$ sau $w^3<0$. Dacă avem un număr impar de numere negative în $(a, b, c)$, atunci $w^3$ este negativ. Astfel, două sunt negative. Datorită simetriei putem presupune, fără a restrânge generalitatea problemei, că $a \geq 0$, $b, c<0$. Fie $b=-x$, $c=-y$. Deci $3u = a-x-y$, $3v^2 = xy-a(x+y)$ şi $x, y>0$.

$u \geq 0 \iff a \geq x+y$

Dacă $a \geq x+y$, atunci $xy-a(x+y) \leq -x^2-xy-y^2$, şi, prin urmare, nu pot amândouă, $u$ şi $v^2$, să fie pozitive, demonstrația fiind terminată.

2. Consecințe:

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = 27\left(-(w^3-3uv^2+2u^3)^2+4(u^2-v^2)^3\right)$$

Inegalitatea de gradul III a lui Schur: $\sum_{cyc} a(a-b)(a-c) \geq 0 \iff w^3+3u^2 \geq 4uv^2$

Identități utile:

1. $(a-b)(b-c)(c-a) = \sum_{cyc} b^2a-ab^2$

2. $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) = 9u^2-6v^2$

3. $(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 = (ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c) = 9v^4-6uw^3$

4. $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \iff$

   $\iff a^3+b^3+c^3 = 27u^3-27uv^2+3w^3$

5. $a^4+b^4+c^4 = (a^2+b^2+c^2)^2-2((ab)^2+(bc)^2+(ca)^2) =$

   $= 9(u^2-6v^2)^2-2(9v^2-6uw^3) = 81u^4-108u^2v^2+18v^4+12uw^3$

## 3 Probleme rezolvate

**1.** Fie a, b, c numere reale nenegative, unde doar unul dintre ele poate lua valoarea 0. Demonstrați că

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{b+a}+\frac{4(a+b+c)(ab+bc+ca)}{a^3+b^3+c^3}\geq 5.$$

Soluție: Notăm inegalitatea de demonstrat cu ⊛.

Fie $a+b+c=3u$, $ab+bc+ca=3v^2$ și $abc=w^3$.

inegalitatea ⊛ devine: $\frac{27u^3-18uv^2+3w^3}{9uv^2-w^3}+\frac{12uv^2}{9u^3-9uv^2+w^3}\geq 5.$

$\Leftrightarrow 8w^6+3(33u^2-49v^2)uw^3+27(3u^2-5v^2)^2u^2\geq 0.$

Fie $u^2=tv^2$. Observăm că pentru $t\geq\frac{49}{33}$ inegalitatea este adevărată.

Pentru $1\leq t\leq\frac{49}{33}$ rămâne de demonstrat că $(33t-49)^2-98(3t-5)^2\leq 0$, inegalitate adevărată $\left(\begin{matrix}\forall t\\ t\in[1,\frac{49}{33})\end{matrix}\right)$.

**2.** Determinați minimul și maximul expresiei $x+y+z+xy+yz+xz$, unde $x^2+y^2+z^2=1$.

Soluție: Notăm $x^2+y^2+z^2=1$ cu ⊛.

Fie $x+y+z=3u$, $xy+yz+zx=3v^2$, unde $v^2$ poate să fie negativ, și $w^3=abc$. Astfel, ⊛ devine $9u^2-6v^2=1$, care nu depinde de $w^3$. De asemenea, relația $x+y+z+xy+yz+zx=3u+3v^2$ nu depinde de $w^3$. Deci, este de ajuns să găsim valorile extreme ale lui $w^3$, valori ce se ating în cazul în care 2 dintre numere sunt egale.

Fie $x=y\Rightarrow z^2=1-2x^2$. Trebuie să găsim valorile extreme ale expresiei $2x+x^2+z(1+2x)$, unde $z^2=1-2x^2$ și $-\frac{1}{\sqrt2}\leq x\leq\frac{1}{\sqrt2}\Rightarrow -1\leq x+y+z+xy+yz+zx\leq 1+\sqrt3$.

Deci, valoarea minimă a ecuației date este 1, iar valoarea maximă este egală cu $1+\sqrt3$.

**3.** Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$. Să se arate că:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 2.$$

(Hungkhtn)

Soluție: Notăm inegalitatea de demonstrat cu ⊛

Fie $a+b+c=3u$, $ab+bc+ca=3v^2$ și $abc=w^3$. Astfel, ⊛ devine

$$\frac{3u^2-2v^2}{v^2}+\frac{8w^3}{9uv^2-w^3}\geq 2 \iff \frac{u^2}{v^2}+\frac{24uv^2}{9uv^2-w^3}\geq 12.$$

Fixând valorile $u$ și $v^2$, este de ajuns să arătăm că relația este adevărată pentru $w^3$ minim. O să demonstrăm că relația este adevărată când 2 dintre numerele $a, b, c$ sunt egale și când unul dintre ele este 0.

I. Datorită simetriei putem presupune, fără a restrânge generalitatea problemei, că $a=b$. Fie $t=\frac{c}{a}$.

⊛ devine: $\frac{2+t^2}{1+2t}+\frac{4t}{t^2+2t+1}\geq 2 \iff t^2(t-1)^2\geq 0$ Adevărat!

II. Datorită simetriei putem presupune, fără a restrânge generalitatea problemei, că $a=0$.

⊛ devine: $\frac{b^2+c^2}{bc}\geq 2$, inegalitate ce este adevărată (din ma $\geq$ mg), cu egalitate când $a=b=c$ sau $a=c; b=0$ sau $a=b; c=0$ sau $b=c; a=0$.

## 4. Probleme propuse:

1. Fie $a, b, c\geq 0$. Arătați că $\frac{a^4+b^4+c^4}{ab+bc+ca}+\frac{3abc}{a+b+c}\geq 2\frac{(a^2+b^2+c^2)}{3}$.

2. Pentru $a+b+c=3$, unde $a, b, c\geq 0$, demonstrați că: $\frac{a+3}{3a+bc}+\frac{b+3}{3b+ca}+\frac{c+3}{3c+ab}\geq 3$

(Test pentru OBMJ 2009, România)

3. Pentru $a, b, c>0$ și $ab+bc+ca=3$, demonstrați că:

$$3+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}\geq \frac{a+b^2c^2}{b+c}+\frac{b+c^2a^2}{c+a}+\frac{c+a^2b^2}{a+b}\geq 3$$

(Olimpiada Indoneezia)

4. Pentru $a, b, c>0$ și $a+b+c=3$, găsiți minimul expresiei $(3+2a^2)(3+2b^2)(3+2c^2)$.


Bibliografie: - „The uvw method” - Mathias Bæk Tejs Knudsen
- artofproblemsolving.com
- https://brilliant.org/wiki/the-uvw-method/