Problema 1
Etapa 2
Clasa a VII-a

Problema 1. Fie $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2024\}$. Să se arate că există o submulţime ordonată $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2023}\}$ pentru care $|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, |a_3 - a_4|, \ldots |a_{2022} - a_{2023}|, |a_{2023} - a_1|$ sunt numere naturale distincte două câte două.

Olimpiadă Germania 2017

Soluţie Cele 2023 diferenţe sunt numere naturale cuprinse între 1 şi 2023, deci pentru orice număr natural nenul mai mic sau egal cu 2023 va exista o diferenţă egală cu acesta.
Se împart numerele în două şiruri $1, 2, 3, \ldots, 1013$ şi $2024, 2023, 2022, \ldots, 1014$, din primul se elimină numărul din mijloc, 507, şi se formează un nou şir astfel

$$1, 2024, 2, 2023, 3, 2022, \ldots, 506, 1519, 508, 1518, 509, 1517, \ldots, 1014, 1013.$$

Calculând modulele diferenţelor numerelor vecine se obţin valorile

$$2023, 2022, 2021, \ldots, 1013, 1011, 1010, \ldots, 1.$$

În plus $|a_{2023} - a_1| = 1012$, deci submulţimea ordonată

$$\{1, 2024, 2, 2023, 3, 2022, \ldots, 506, 1519, 508, 1518, 509, 1517, \ldots, 1014, 1013\}$$

verifică cerinţa problemei.