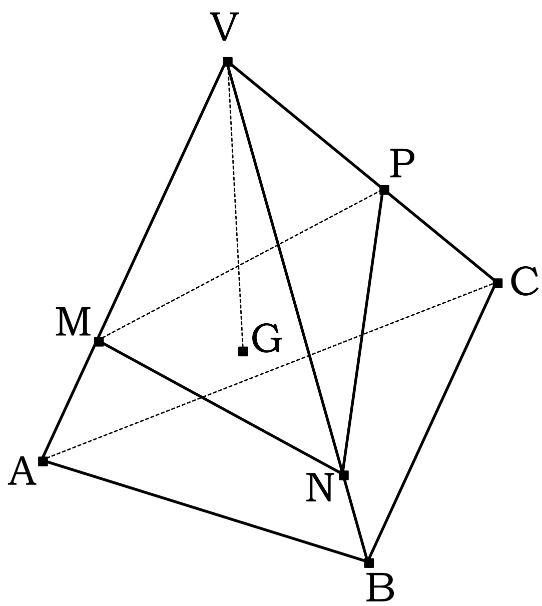
Etapa 6, Problema 1

Un plan taie muchiile VA, VB, VC ale piramidei triunghiulare $VABC$ în punctele M, N respectiv P. Demonstrați că centrul de greutate G al piramidei aparține planului (MNP) dacă şi numai dacă $\frac{MA}{MV}+\frac{NB}{NV}+\frac{PC}{PV}=1$.

Soluţie.

Dacă notam cu a, b, c valorile rapoartelor din enunț, atunci $\overrightarrow{VM}=\frac{1}{a+1}\overrightarrow{VA}$, $\overrightarrow{VN}=\frac{1}{b+1}\overrightarrow{VB}$, $\overrightarrow{VP}=\frac{1}{c+1}\overrightarrow{VC}$.



Avem că $G\in(MNP)$ dacă şi numai dacă există $x,y,z\in\mathbb{R}$, $x+y+z=1$, astfel încât $\overrightarrow{VG}=x\overrightarrow{VM}+y\overrightarrow{VN}+z\overrightarrow{VP}=x\frac{1}{a+1}\overrightarrow{VA}+y\frac{1}{b+1}\overrightarrow{VB}+z\frac{1}{c+1}\overrightarrow{VC}$. Dar $\overrightarrow{VG}=\frac{\overrightarrow{VA}+\overrightarrow{VB}+\overrightarrow{VC}}{4}$ şi atunci $x=\frac{a+1}{4}$, $y=\frac{b+1}{4}$, $z=\frac{c+1}{4}$ şi, prin adunare, deducem că $a+b+c=1$, adică exact relația ce trebuia demonstrată.■