

PROBLEME CU NUMERE RAȚIONALE

ABSTRACT. Articolul prezintă câteva probleme care pot să apară între subiectele de la concursurile de matematică.

Lecția se adresează clasa a VI-a.

Autor: Ion Cicu, Profesor, Școala nr. 96, București

Problema 1: Găsiți cel mai mic număr natural \overline{abcd} , cu cifre diferite, știind că numerele $\frac{73}{168} \cdot \overline{abcd}$, $\frac{65}{126} \cdot \overline{abcd}$ și $\frac{35}{72} \cdot \overline{abcd}$ sunt naturale.

Soluție: Pentru a putea rezolva problema avem în vedere următoarele afirmații:

$$P_1) \frac{m}{n} \cdot p = \frac{m \cdot p}{n}$$

P₂) Dacă $\frac{m}{n}$ este număr natural atunci " n este un divizor al lui m " sau " m este un multiplu al lui n ".

Acestea fiind spuse să trecem la rezolvarea problemei.

Avem $\frac{73}{168} \cdot \overline{abcd} = \frac{73 \cdot \overline{abcd}}{168}$ care este număr natural dacă 168 divide $73 \cdot \overline{abcd}$. Cum 168 și 73 sunt prime între ele deducem

$$168 \text{ divide } \overline{abcd} \quad (1).$$

De asemenea, $\frac{65}{126} \cdot \overline{abcd} = \frac{65 \cdot \overline{abcd}}{126}$ care este număr natural dacă 126 divide $65 \cdot \overline{abcd}$. Cum 126 și 65 sunt prime între ele deducem

$$126 \text{ divide } \overline{abcd} \quad (2).$$

Analog găsim

$$72 \text{ divide } \overline{abcd} \quad (3).$$

Dar afirmațiile (1), (2) și (3) pot fi formulate și astfel:

$$\overline{abcd} \text{ este multiplu al numerelor } 168, 126 \text{ și } 72.$$

Dintre toți multiplii comuni a două sau mai multe numere noi știm să-l aflăm pe cel mai mic. În cazul nostru acesta este 504 și atunci numărul căutat va fi

$$\overline{abcd} = 504 \cdot k.$$

Cum numărul căutat trebuie să fie cel mai mic și cu cifre diferite deducem că

$$\overline{abcd} = 2016.$$

Problema 2: Aflați numerele naturale n pentru care numărul $\frac{9n+17}{2n+1}$ este natural.

Soluție: Pentru rezolvarea acestei probleme folosim P_2 de la problema 1 și următoarele proprietăți ale divizibilității:

P_3) a îl divide pe a

P_4) Dacă a îl divide pe b atunci a îl divide pe $m \cdot b$

P_5) Dacă a divide și pe b și pe c , atunci a divide și pe $b+c$ și pe $b-c$.

Și acum soluția problemei:

Pentru ca numărul $\frac{9n+17}{2n+1}$ să fie natural trebuie ca $2n+1$ să dividă pe $9n+17$ (vezi P_2). Problema este că nu cunosc divizorii lui $9n+17$. Ar fi mult mai bine dacă nu l-am avea pe n . Îl vom elimina pe n folosind proprietatea P_5 . Pentru aceasta avem nevoie de încă o relație de divizibilitate pe care ne-o asigură proprietatea P_3 și anume $2n+1$ divide pe $2n+1$.

Avem așadar

$$2n+1 \text{ divide } 9n+17$$

$$2n+1 \text{ divide } 2n+1$$

Din aceste două relații, prin adunare sau scădere trebuie să obținem că $2n+1$ divide un număr care nu-l mai conține pe n . Pentru aceasta ar trebui ca în cele două afirmații de mai sus, în dreapta să apară același număr de n -uri. În acest scop pe $9n+17$ îl înmulțim cu 2, iar pe $2n+1$ îl înmulțim cu 9 pentru a ajunge la cel mai mic multiplu comun între 9 și 2 (ne dă voie P_4).

Obținem astfel

$$2n+1 \text{ divide } 18n+34$$

$$2n+1 \text{ divide } 18n+9$$

Din P_5 avem că $2n+1$ divide diferența celor două numere, adică

$$2n+1 \text{ divide pe } 25$$

Cum divizorii lui 25 sunt 1, 5 și 25 deducem $2n+1 = 1$ sau $2n+1 = 5$ sau $2n+1 = 25$ de unde rezultă $n = 0$ sau $n = 2$ sau $n = 12$.

În concluzie, dacă $n \in \{0, 2, 12\}$ atunci numărul $\frac{9n+17}{2n+1}$ este natural.

Problema 3: Arătați că fracția $\frac{4n+9}{3n+7}$ este ireductibilă.

Soluție: Se știe că o fracție ireductibilă este o fracție care nu se mai poate simplifica. Se mai știe că simplificarea se face totdeauna printr-un divizor comun al numărătorului și numitorului.

În concluzie, pentru a arăta că fracția dată este ireductibilă, trebuie să arătăm că cel mai mare divizor comun între numărător și numitor este 1 (numărătorul și numitorul sunt prime între ele).

Fie d un divizor comun al numărătorului și numitorului. Atunci

$$\begin{aligned}d &\text{ divide } 3n + 7 \\d &\text{ divide } 4n + 9\end{aligned}$$

Procedând ca la problema 2 avem

$$\begin{aligned}d &\text{ divide } 12n + 28 \\d &\text{ divide } 12n + 27\end{aligned}$$

(am folosit P_4)

De aici obținem, pe baza lui P_5 că,

$$d \text{ divide pe } 1$$

Așadar fracția dată este ireductibilă.

Problema 4: Arătați că fracția $\frac{30k + 11}{42k + 19}$ este ireductibilă, pentru orice k număr natural.

Soluție: Fie d un divizor comun al numărătorului și numitorului. Din

$$\begin{aligned}d &\text{ divide } 30k + 11 \\d &\text{ divide } 42k + 19\end{aligned}$$

obținem

$$d \text{ divide } 5 \cdot (42k + 19) - 7 \cdot (30k + 11)$$

adică

$$d \text{ divide } 18$$

Divizorii naturali ai lui 18 sunt 1, 2, 3, 6, 9, 18 și atunci

$$d \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

Fracția nu poate fi simplificată prin 2 pentru că numărătorul și numitorul sunt numere impare. Atunci nu poate fi simplificată nici prin 6 și nici prin 18.

Deoarece 30 și 42 sunt multiplii de 3, iar 11 și 19 nu se divid cu 3 rezultă că fracția nu poate fi simplificată prin 3, deci nici prin 9.

În concluzie, $d = 1$, așadar fracția este ireductibilă.

Problema 5: Se dau numerele raționale pozitive a, b, c cu proprietățile:

$$\frac{3a}{2} = \frac{4b}{3} = \frac{5c}{4} \quad \text{și} \quad 15a - 4b + 5c = 4.$$

Să se arate că are loc inegalitatea: $\frac{4}{3} < 3a - 3b + 5c < \frac{7}{5}$.

GMB 6/2011

Soluție. Notăm $\frac{3a}{2} = \frac{4b}{3} = \frac{5c}{4} = k$ și obținem $a = \frac{2k}{3}$, $b = \frac{3k}{4}$ și $c = \frac{4k}{5}$.

Înlocuind în cea de-a doua ecuație obținem $11k = 4$, deci $k = \frac{4}{11}$.

$$\text{Rezultă } a = \frac{8}{33}, b = \frac{3}{11}, c = \frac{16}{55}.$$

Avem $3a - 3b + 5c = 3 \cdot \frac{8}{33} - 3 \cdot \frac{3}{11} + 5 \cdot \frac{16}{55} = \frac{8 - 9 + 16}{11} = \frac{15}{11}$. Inegalitatea cerută devine $\frac{4}{3} < \frac{15}{11} < \frac{7}{5}$, adică $220 < 225 < 231$, adevărat.

Problema 6: Determinați numerele \overline{abc} știind că cifrele sale sunt numere prime și $\frac{3a+2b}{6} = \frac{3b+c}{7} = \frac{a+4c}{11}$.

GMB 5/2012

Soluție. Din $\frac{3a+2b}{6} = \frac{3b+c}{7}$ obținem $21a = 2(2b+3c)$, de unde deducem că $2 \mid 21a$. Cum $(21, 2) = 1$ rezultă $2 \mid a$. Dar a este număr prim, deci $a = 2$. Din $\frac{3a+2b}{6} = \frac{a+4c}{11}$ și $a = 2$ obținem $11b = 3(4c-9)$, de unde deducem că $3 \mid 11b$. Cum $(3, 11) = 1$ rezultă $3 \mid b$ și cum b este număr prim obținem $b = 3$. Revenind la relația $21a = 2(2b+3c)$ găsim $c = 5$. Numărul căutat este 235.