# ***ECUAȚII DIOFANTICE ELEMENTARE (GRD I)***

Lecția se adresează clasei a VII-a
Autor: Adriana Renata Smolik, clasa a VII-a, C.N."Frații Buzești", Craiova

Despre marele matematician grec Diofant din Alexandria, supranumit „Părintele algebrei", s-au mai păstrat azi foarte puține date biografice. Autor al unei serii de texte intitulate „Aritmetica", pierdute azi în cea mai mare parte, Diofant a trăit undeva în secolul al III-lea d.Chr., dar lucrările lui au constituit punctul de plecare și sursa de inspirație a operelor unor generații întregi de matematicieni din secolele următoare.

**Definiție:** Se numeste ecuatie diofantica ecuatia de forma P($x_1, x_2, ..., x_n,$ ) = 0, unde P($x_1, x_2, ..., x_n$ ) este un polinom cu coeficienti intregi.

**Exemplu:** O ecuaţie diofantică de gradul întâi cu două necunoscute este de forma ax + by = c (1) unde a,b,c$\in$ Z, ab $\neq$ 0 (1)

**Teorema: 1. Condiţia necesară şi suficientă ca ecuaţia de mai sus să admită soluţie este ca d/c, unde d=(a,b).**

**Demonstratie:**
Dacă există o pereche de nr q si r care verifică relatia, atunci qx + ry = c şi prin urmare d/c, deci condiţia este necesară. Dacă d/c, există 1 k $\in$R, astfel încât c=d k . Deoarece d=(a,b), există u,v$\in$Z, astfel încât au + bv = d . Înmulţind ambii membrii ai egalităţii cu k, obţinem a( k u) + b( k v) = c, prin urmare ( k u, k v) este o soluţie particulară a ecuaţiei

**Teoremă: 2. Dacă ecuaţia diofantică ax + by = c are soluţia particulară ) ( $x_0, y_0$) şi d=(a,b), soluţia generală e ecuaţiei este dată de:**
**x =** $x_0 + (b/d)t$ , $y = y_0 - (a/d)t$ **, t**$\epsilon Z$

**Demostratie:**
Dacă ( $x_0, y_0$)este o soluţie particulară, atunci a $x_0$ + b $y_0$ = c . Pentru o pereche arbitrară (x,y) intregi , avem ax + by = c . Scăzând cele două relaţii,

obţinem: a $(x - x_0) = b(y - y_0)$. Cum a=$a_1$d, b=$b_1$ d( $a_1$,$b_1$ ) realtia de mai sus prin inlocuire, ne duce la concluzia ca exista un t din Z a.i $x - x_0 = b_1$t si $y - y_0 = a_1$t. Similar, se demonstreaza reciproca.

**Exemple:**

1. **Să se determine cel mai mare divizor comun al numerelor întregi 1215 şi –2755 şi să se exprime acestea ca o combinaţie liniară a celor două numere.**

d = (1215,-2755) = (2755,1215).
Aplicând algoritmul lui Euclid, avem:
2755 = 1215 · 2 + 325
1215 = 325 · 3 + 240
325 = 240 · 1 + 85
240 = 85 · 2 + 70
85 = 70 · 1 + 15
70 = 15 · 4 + 10
15 = 10 · 1 + 5
10 = 5 · 2 , deci d=5
Pentru a afla u,v∈Z astfel încât d = 1215u + (−2755)v folosim algoritmul de mai sus.
Avem:
325 = 1 · 2755 + (2) · 1215
240 = (-3) · 2755 + 7 · 1215
85 = 325 - 240 · 1 = 4 · 2755 - 9 · 1215
70 = 240 - 85 · 2 = (-11) · 2755 + 25 · 1215
15 = 15 · 2755 - 34 · 1215
10 = -71 · 2755 + 161 · 1215
5 = 86 · 2755 - 195 · 1215
Deci 5 = 1215 · (-195) + (-2755) · (-86)

2. **Să se rezolve în Z ecuaţia 1215x – 2755y = 560.**

Avem 5 560, deci ecuaţia are soluţii.

Cum 560 = 5 · 112, soluţia particulară este $x_0 = -195 \cdot 112, y_0 = -86 \cdot 112$, iar soluţia generală x = $x_0 + 551 \cdot t$ , y = $y_0 + 243 \cdot t$ , t $\in$ Z.

**3. Să se rezolve în Z ecuaţia diofantică $4x_1 - 6x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 14$.**

d = (4,−6,10,2) = 2 şi 2 14 , deci ecuaţia are soluţii.

Fie $4x_1 - 6x_2 + 10x_3 = 2y_1$, Deci ecuatia initiala va fi acum: $2y_1 + 2x_4 = 14$, sau $y_1 + x_4 = 7$.

Daca $y_1 = t_3$ $avem$ $x_4 = 7 - t_3$.
$4x_1 - 6x_2 + 10x_3 = 2t_3$.
$2x_1 - 3x_2 = y_2$. deci obtinem ca $y_2 + 5x_3 = t_3$.
Daca $x_3 = t_2$ rezulta ca $y_2 = t_3 - 5t_2$.
Inlocuind, obtinem $x_1 = 2t_3 - 10t_2 + 3t_1$ $si$ $x_2 = t_3 - 5t_2 + 2t_1$.

Deci, solutia generala a ecuatiei va fi:
$x_1 = 3t_1 - 10t_2 + 2t_3$
$x_2 = 2t_1 - 5t_2 + t_3$
$x_3 = t_2$
$x_4 = 7 - t_3$, unde toate nr t sunt intregi.

**BIBLIOGRAFIE**


1) Gazeta Matematica, Seria B, din anii 2014 - 2021
2) Bălăucă Artur, Aritmetică, Algebră, Geometrie, cls a VII-a, Ed. Taida, Iași, 2018
3) Viitoriolimpici.ro