

Etapa 4, Problema 4

Determinați toate perechile $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ care verifică egalitatea

$$x(x+1) = y^7.$$

Crux Mathematicorum

Soluție.

Evident, $(0, 0)$ este soluție.

Se verifică ușor că, dacă (x, y) este soluție cu măcar o componentă nenulă, atunci $x \geq 2$ și $y \geq 2$. Dacă p este un număr prim din descompunerea lui y , p divide exact unul dintre numerele relativ prime x și $x+1$. Rezultă că există $a, b \in \mathbb{N}$, $a, b \geq 2$, astfel încât $x = a^7$ și $x+1 = b^7$. Atunci

$$b^7 - a^7 = 1$$

$$\Leftrightarrow (b-a)(b^6 + ab^5 + \dots + a^5b + a^6) = 1.$$

Cum $b^6 + ab^5 + \dots + a^5b + a^6 \geq 2$, ultima egalitate este falsă.

În concluzie, unica soluție a ecuației este $(0, 0)$.