



Etapa finală, Ediția a XIII-a, 2022

Clasa a X-a

**Problema 3.** Într-o urnă se găsesc  $a_k$  bile identice de culoare  $C_k$ , pentru fiecare  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , unde numerele  $n, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$  sunt date, iar  $C_1, C_2, \dots, C_n$  sunt culori distincte. Numim *configurație* de bile o mulțime nevidă de bile din urnă. Două configurații de bile sunt considerate identice atunci când, pentru orice  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  ele conțin exact același număr de bile de culoare  $C_k$ . Definim *paleta* unei configurații de bile ca fiind numărul de culori distincte ale bilelor sale. De exemplu, o configurație compusă din 4 bile roșii, 2 bile galbene și 5 bile albastre are paleta 3, iar o configurație compusă din 7 bile roșii are paleta 1.

Dacă notăm cu  $N$  suma paletelor tuturor configurațiilor distincte de bile ce pot fi obținute cu bile din urnă, arătați că

$$N \leq \sum_{k=1}^n a_k (a_k + 1)^{n-1}.$$