Etapa 7, Problema 3

Determinați numerele reale x, y și z care verifică simultan condițiile

$$\begin{cases} \sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{4z+1}=15 \\ 3^{2x+\sqrt{3y+1}}+3^{3y+\sqrt{4z+1}}+3^{4z+\sqrt{2x+1}}=3^{30} \end{cases}.$$

Marcel Chiriță

Soluție.

Cu notațiile $\sqrt{2x+1}=a$, $\sqrt{3z+1}=b$ și $\sqrt{4z+1}=c$, obținem sistemul

$$\begin{cases} a+b+c=15 \\ 3^{a^2-1+b}+3^{b^2-1+c}+3^{c^2-1+a}=3^{30} \end{cases}.$$

Din inegalitatea mediilor,

$$3^{30}=3^{a^2-1+b}+3^{b^2-1+c}+3^{c^2-1+a}\geq 3\cdot\sqrt[3]{3^{a^2-1+b}\cdot 3^{b^2-1+c}\cdot 3^{c^2-1+a}}=3\cdot 3^{\frac{a^2+b^2+c^2-a-b-c-3}{3}}=3^{\frac{a^2+b^2+c^2-a-b-c}{3}}.$$

Atunci $a^2+b^2+c^2-a-b-c\leq 90$, prin urmare $a^2+b^2+c^2\leq 105$.

Dar $a^2+b^2+c^2\geq\dfrac{(a+b+c)^3}{3}=75$, de unde $a^2+b^2+c^2=75$, cu egalitate pentru $a=b=c=5$.

Soluția sistemului din enunț este $x=12,\ y=8,\ z=6$.