P3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $m, n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că

$$det(((AB)^n - (BA)^n)((AB)^m - (BA)^m)) \geq 0.$$

S. Notând $t = tr(AB) = tr(BA)$ şi $d = det(AB) = det(BA)$, avem că

$$(AB)^2 = t \cdot AB - d \cdot I_2 \quad \text{şi} \quad (BA)^2 = t \cdot BA - d \cdot I_2,$$

de unde obţinem că $(AB)^2 - (BA)^2 = t \cdot (AB - BA)$, precum şi

$$(AB)^{n+2} = t \cdot (AB)^{n+1} - d \cdot (AB)^n \quad \text{şi} \quad (BA)^{n+2} = t \cdot (BA)^{n+1} - d \cdot (BA)^n \quad , (\forall) n \in \mathbb{N}.$$

Dar atunci şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_1 = 1$, $x_2 = t$ şi relaţia de recurenţă

$$x_{n+2} = t \cdot x_{n+1} - d \cdot x_n, \ (\forall) n \geq 1,$$

are proprietatea că

$$(AB)^n - (BA)^n = x_n(AB - BA) \quad , (\forall) n \geq 1.$$

Obţinem că

$$det(((AB)^n - (BA)^n)((AB)^m - (BA)^m)) = det(x_n x_m (AB - BA)^2) = x_n^2 x_m^2 (det(AB - BA))^2 \geq 0 \quad , (\forall) n, m \geq 1.$$