Etapa 1, Problema 4

Fie n un număr natural, $n \geq 2$. Demonstrați că, pentru orice $x \in [1, n]$, este adevărată inegalitatea

$$\left[\frac{n^2}{4}\right] \leq |x-1|+|x-2|+|x-3|+\ldots+|x-n| \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Nicolae Bourbăcuț

Soluție.

Considerăm funcția $f:[1,n] \to \mathbb{R}, f(x)=|x-1|+|x-2|+\ldots+|x-n|$. Fiind sumă de funcții convexe, funcția *f* este convexă. Valoarea sa maximă se atinge în unul dintre capetele domeniului. Însă $f(1)=f(n)=\frac{n(n-1)}{2}$, prin urmare $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\ldots+|x-n| \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Pentru prima inegalitate, fie $x \in [k, k+1)$. Explicitînd modulele, obținem că restricția funcției *f* la intervalul $[k, k+1)$ se definește prin

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1+\ldots+x-k)+(k+1-x+\ldots+n-x) \\ &= (2k-n)x+\frac{n(n+1)}{2}-2\frac{k(k+1)}{2}, \end{aligned}$$

deci este liniară. Fiecare asemenea restricție își va atinge extremele în capetele intervalului pe care este definită, deci minimul lui *f* este, de fapt,

$$\min_{x=k\in\{1,2,\ldots,n\}}\left\{(2k-n)x+\frac{n(n+1)}{2}-2\frac{k(k+1)}{2}\right\}.$$

Pentru $x=k$ expresia de minimizat devine $k^2-(n+1)k+\frac{n(n+1)}{2}$, expresie de gradul doi care admite minim pentru $k=\left[\frac{n+1}{2}\right]$. Din analiza separată a cazurilor n par respectiv n impar, obținem concluzia.