Problema 3. Rezolvați în mulțimea numerelor prime ecuația $(p-1)^p = q+1$.

Răzvan Ceucă

Soluție: $(p-1)^p = q+1 \quad (1)$

• Dacă $p=2$

$(2-1)^2 = q+1 \Rightarrow 1 = q+1 \Rightarrow q=0$ Contradicție cu q prim.

Deci p este impar.

• Dacă $q=2 \Rightarrow (p-1)^p = 3$ Contradicție cu $(p-1)^p$ număr par.

Deci p, q diferiți de 2.

(1) devine $(p-1)^p - 1 = q$

Aplicăm formula:

$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$

În cazul nostru avem:

$(p-1-1)[(p-1)^{p-1} + (p-1)^{p-2} + \dots + (p-1) + 1] = q$

$(p-2)[(p-1)^{p-1} + \dots + 1] = q \Longrightarrow$

$\Rightarrow p-2 \mid q \Rightarrow p-2 = 1$ sau $p-2 = q$

Luăm pe rând:

I $p-2 = 1 \Rightarrow p = 3$

Înlocuim în (1) și obținem:

$(3-1)^3 = q+1 \Rightarrow 2^3 = q+1 \quad \boxed{q=7}$

$\begin{cases} p=3 \\ q=7 \end{cases}$ este soluție

II $p-2 = q$

Înlocuim în (1)

$(p-1)^p = p-2+1 = p-1 \Rightarrow (p-1)^p = p-1 \Rightarrow p=1$ Contradicție

Deci singura soluție este $\begin{cases} p=3 \\ q=7 \end{cases}$

Băltoi Teodor, Clasa a VI-a

Colegiul Național „Roman – Vodă"