Partea întreagă, partea fracţionară a unui număr real

ABSTRACT: Materialul conţine câteva proprietăţi şi rezultate legate de partea întreagă şi cea fracţionară a unui număr real, precum şi unele probleme reprezentative.

- Lecţia se adresează clasei a VIII a.

  Recomandăm şi parcurgerea materialului propus clasei a VII a pentru aceeaşi etapă.

- Data: 9 octombrie 2012-10-07

- Autor: Lucian Dragomir, Liceul Bănăţean Oţelu Roşu

I. Definiţii, notaţii, proprietăţi.

● Dacă un număr real *a* are scrierea zecimală $a = a_0, a_1a_2a_3...$

(evident $a_0 \in \mathbb{Z}$ şi $a_1, a_2, a_3, ... \in \{0,1,2,...,9\}$), atunci partea întreagă a lui *a* se notează cu $[a]$ şi se defineşte prin $[a] = \begin{cases} a_0 & , \text{ dacă } a \geq 0 \\ a_0 - 1 & , \text{ dacă } a < 0 \end{cases}$.

● Mai simplu de reţinut: partea întreagă a lui *a* este cel mai mare număr întreg care nu îl depăşeşte pe *a* (este aşadar cel mult egal cu *a*); dacă facem apel la reprezentarea pe axă a numerelor reale, atunci $[a]$ este primul număr întreg din stânga lui *a* .

● În baza axiomei lui Arhimede, se poate spune şi: pentru orice număr real *a* , există un unic număr întreg, notat cu $[a]$, astfel încât $[a] \leq a < [a]+1$; aşadar, pentru orice $a \in \mathbb{R}$ avem: $[a] = k \in \mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă $k \leq a < k+1$.

● Prin definiţie, partea fracţionară a numărului real *a* este $\{a\} = a - [a]$; evident $\{a\} \in [0,1)$.

● Vom trece în revistă câteva proprietăţi şi rezultate utile, des folosite în rezolvarea problemelor, fără să uităm a spune că acestea vor uşura trecerea peste unele *obstacole* apărute, de exemplu, în aritmetică, în analiza matematică, în chestiuni de numărare şi combinatorică.

P 1. $a - 1 < [a] \leq a$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

P 2. $a < k \Leftrightarrow [a] < k, \forall a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

P 3. $[k + \alpha] = k, \forall k \in \mathbb{Z}, \alpha \in [0,1)$.

P 4. $[a + k] = [a] + k, \forall a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

P 5. $\{a+k\}=\{a\}, \forall a\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{Z}.$

P 6. $[[a]]=[a], \{\{a\}\}=\{a\}, [\{a\}]=\{[a]\}=0, \forall a\in\mathbb{R}.$

P 7. Dacă $a,b\in\mathbb{R}$ şi $[a]=[b]$, atunci $|a-b|<1.$

(Reciproca este falsă; e suficient un contraexemplu: $a=\frac{1}{3}, b=-\frac{1}{3}$)

P 8. $\{a\}=\{b\} \Leftrightarrow (a-b)\in\mathbb{Z}, \forall a,b\in\mathbb{R}.$

P 9. $[a]+[b]\le[a+b]\le[a]+[b]+1, \forall a,b\in\mathbb{R}.$

P 10. $[-x]+[x]=-1, \ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$**.**

P 11. $[a]+\left[a+\frac{1}{2}\right]=[2a], \forall a\in\mathbb{R}.$ (identitatea lui Hermite; de remarcat că aceasta admite o generalizare destul de des utilizată: $[a]+\left[a+\frac{1}{n}\right]+\left[a+\frac{2}{n}\right]+...+\left[a+\frac{n-1}{n}\right]=[na], \forall a\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*.$)

P 12. Exponentul numărului prim *p* din descompunerea în factori primi ai numărului $n!$ este

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+....$$

II. Probleme instructive.

1. Să se arate că $[na]=[nb], \forall n\in\mathbb{N}$ dacă şi numai dacă $a=b.$

(Gheorghe Andrei, OJ Constanţa, 1996)

Soluţie: Dacă $a=b$ prima egalitate este evidentă. Presupunând că $a\ne b$ şi $[na]=[nb], \forall n\in\mathbb{N}$,obţinem $na-\{na\}=nb-\{nb\} \Rightarrow n(a-b)=\{na\}-\{nb\}\in(-1,1)$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Dacă $a>b$, membrul stâng al ultimei egalităţi poate fi oricât de mare, contradicţie. Analog dacă $a<b$, aşadar $a=b.$ □

2. Dacă $a,b\in\mathbb{R}$, să se arate că $\{a\}+\{b\}=1$ dacă şi numai dacă $(a+b)\in\mathbb{Z}$ şi $a,b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.$

(Gheorghe Andrei)

Soluţie: Dacă $a,b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ şi $(a+b)\in\mathbb{Z}$,atunci $\{a\}+\{b\}\in[0,2)$; cum $\{a\}+\{b\}=a-[a]+b-[b]\in\mathbb{Z}$,deducem că $\{a\}+\{b\}\in\{0,1\}$. Deoarece $\{a\}+\{b\}\ne0$ (în caz contrar am ajunge la $a,b\in\mathbb{Z}$, contradicţie), obţinem $\{a\}+\{b\}=1$ .Reciproc, dacă $\{a\}+\{b\}=1$, avem $\{a\}\ne0, \{b\}\ne0$ şi, din $1=\{a\}+\{b\}=a-[a]+b-[b]$, deducem $(a+b)\in\mathbb{Z}$.□

3. Să se determine partea întreagă a numărului $\sqrt{n^2+3n}, n\in\mathbb{N}^*$.

(Concurs Florica T.Câmpan,2003)

Soluţie: Deoarece $n^2+2n+1\le n^2+3n<n^2+4n+4, \forall n\in\mathbb{N}^*$,deducem că $n+1\le\sqrt{n^2+3n}<n+2$ şi astfel $\left[\sqrt{n^2+3n}\right]=n+1, \forall n\in\mathbb{N}^*$. □

4. Să se arate că partea fracţionară a numărului $\sqrt{4n^2+n}, n\in\mathbb{N}^*$ **este mai mică decât** $0,25$.

(Concurs Unirea,2003)

Soluţie: Deoarece $2n<\sqrt{4n^2+n}<2n+1, \forall n\in\mathbb{N}^*$, avem că $\left[\sqrt{4n^2+n}\right]=2n$ şi deci $\left\{\sqrt{4n^2+n}\right\}=\sqrt{4n^2+n}-2n$. Rămâne de arătat că $\sqrt{4n^2+n}-2n<0,25$, ceea ce este echivalent cu $\sqrt{4n^2+n}<0,25+2n \Leftrightarrow 4n^2+n<4n^2+n+0,0625$, ultima inegalitate fiind evident adevărată. □

5. Să se calculeze suma $S=\left[1+\sqrt{2}\right]+\left[\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right]+\left[\frac{3+\sqrt{4}}{3}\right]+...+\left[\frac{n+\sqrt{n+1}}{n}\right], n\in\mathbb{N}^*$.

(Concurs Reghin,2005)

Soluţie: Folosind **P.4.**, avem imediat $S=1+\left[\sqrt{2}\right]+1+\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]+1+\left[\frac{\sqrt{4}}{3}\right]+...+1+\left[\frac{\sqrt{n+1}}{n}\right]$;

deoarece $0<\frac{\sqrt{k+1}}{k}<1, \forall k\in\mathbb{N}, k\ge 3$ (inegalitate imediată), ajungem la $S=1+1+n-1=n+1$. □

6. Să se rezolve ecuaţia $[-2x]+[-x]+[x]+[2x]+1=0$.

(Andrei Eckstein, OL Timiş, 2009)

Soluţie: Este naturală folosirea proprietăţii **P 10.** (cu evidenta observaţie că $[-x]+[x]=0, \ \forall x\in\mathbb{Z}$). Avem astfel că, dacă $x\in\mathbb{Z}$, ecuaţia conduce la $0+0+1=0$, evident fals, deci ecuaţia nu are soluţii întregi. Dacă $x\notin\mathbb{Z}$ şi $2x\notin\mathbb{Z}$, se ajunge la egalitatea $-1+(-1)+1=0$ (falsă şi aceasta). Dacă $2x\in\mathbb{Z}$, dar $x\notin\mathbb{Z}$, atunci $[-2x]+[-x]+[x]+[2x]+1=0+(-1)+1=0$, aşadar orice $x\notin\mathbb{Z}$ pentru care $2x\in\mathbb{Z}$ este soluţie a ecuaţiei, mulţimea soluţiilor acesteia fiind $S=\left\{\frac{2n+1}{2} \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$. □

7. Să se calculeze suma $S=\left[\sqrt{2\cdot 5}\right]+\left[\sqrt{3\cdot 6}\right]+\left[\sqrt{4\cdot 7}\right]+...+\left[\sqrt{100\cdot 103}\right]$.

(OL Arad,2006)

Soluţie: Prin ridicări la pătrat se arată imediat că $n+1\le\sqrt{n(n+3)}<n+2,\forall n\in\mathbb{N},n\ge 2$ şi deci $\left[\sqrt{n(n+3)}\right]=n+1,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Folosind acest rezultat, deducem imediat că $S=3+4+5+...+101=5148.$ □

8. Se consideră numerele $p,q\in\mathbb{N}^*,1\le q\le p$ şi $a=\left(\sqrt{p^2+q}+p\right)^2$. Să se arate că *a* este iraţional şi are partea fracţionară strict mai mare decât $0,75$.

(Adrian P.Ghioca,ON 2000)

Soluţie: Din $1\le q\le p$ rezultă că $p^2<p^2+q\le p^2+p<p^2+p+\frac{1}{4}$ şi astfel $p<\sqrt{p^2+q}<p+\frac{1}{2}$. Deducem astfel că $\sqrt{p^2+q}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Deoarece $a=2p^2+q+2p\cdot\sqrt{p^2+q}$ şi $p\ge 1$, obţinem şi că $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Considerăm acum $b=\left(\sqrt{p^2+q}-p\right)^2$. Deoarece $0<\left(\sqrt{p^2+q}-p\right)<\frac{1}{2}$, rezultă că $b<\frac{1}{4}$. Să observăm acum că $a+b=2\cdot\left(2p^2+q\right)=c\in\mathbb{N}^*$, aşadar $c-\frac{1}{4}<c-b=a<c,$ de unde $[a]=c-1$ şi deci $\{a\}=a-[a]=c-b-c+1=1-b>\frac{3}{4}.$ □

9. Să se arate că $\left[\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}\right]=\left[\sqrt{n}\right],\forall n\in\mathbb{N}.$

(Gheorghe Eckstein)

Soluţie: Dacă $\left[\sqrt{n}\right]=k\in\mathbb{N}$, atunci $k\le\sqrt{n}<k+1\Leftrightarrow k^2\le n<(k+1)^2\Leftrightarrow k^2\le n\le(k+1)^2-1$

(aţi sesizat ultimul pas !?). Evident acum : $\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}>\sqrt{n}\ge k$ şi

$$\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}=\sqrt{n}+\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2}=\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2}\le\frac{\sqrt{(k+1)^2+1}+\sqrt{(k+1)^2-1}}{2}<k+1.$$

Ultima inegalitate este adevărată deoarece ea este succesiv echivalentă cu:

$$\sqrt{(k+1)^2+1}+\sqrt{(k+1)^2-1}<2(k+1)\Leftrightarrow$$
$$2(k+1)^2+2\cdot\sqrt{(k+1)^4-1}<4(k+1)^2\Leftrightarrow\sqrt{(k+1)^4-1}<(k+1)^2.$$

Aşadar $\left[\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}\right]=k=\left[\sqrt{n}\right], \forall n\in\mathbb{N}$. □

10. Să se arate că prin împărţirea lui $k\in\mathbb{Z}$ la $n\in\mathbb{N}^*$ se obţine câtul $\left[\frac{k}{n}\right]$ şi restul $n\cdot\left\{\frac{k}{n}\right\}$.

Soluţie: Notăm câtul şi restul cu q, respectiv r şi avem: $k=nq+r$, cu $0\le r<n$. Deducem acum:

$q\le\frac{nq+r}{n}=\frac{k}{n}<\frac{nq+n}{n}=q+1$, aşadar $\left[\frac{k}{n}\right]=q$. Pe de altă parte,

$$n\cdot\left\{\frac{k}{n}\right\}=n\left(\frac{k}{n}-\left[\frac{k}{n}\right]\right)=n\left(\frac{nq+r}{n}-q\right)=r.$$

Observaţie: Această problemă pune în evidenţă faptul că, dacă $n\in\mathbb{N}^*$, atunci în mulţimea $\{1,2,3,...,k\}$ avem exact $\left[\frac{k}{n}\right]$ multipli de n .□

11. Să se determine câte numere naturale nenule, mai mici decât 100, nu sunt divizibile nici cu 2, nici cu 3.

Soluţie: Ne referim aşadar la mulţimea $\{1,2,3,...,99\}$ în care avem $\left[\frac{99}{2}\right]=49$ de numere divizibile cu 2 şi $\left[\frac{99}{3}\right]=33$ de numere divizibile cu 3. Am fi poate tentaţi să dăm rezultatul $99-(49+33)$, însă trebuie să remarcăm că unele numere au fost numărate de două ori (de exemplu 6, 12 , 18 , ...) – numărul acestora este egal cu $\left[\frac{99}{2\cdot 3}\right]=16.$ Abia acum putem da rezultatul corect: avem $99-(49+33-16)=33$ de numere cu proprietatea din enunţ.

Observaţie: Să remarcăm aici că soluţia foloseşte de fapt un binecunoscut principiu de numărare, anume **Principiul includerii şi excluderii.** Este vorba despre următorul rezultat:

(1) Dacă *A* şi *B* sunt două mulţimi finite, atunci $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

(principiul includerii şi excluderii pentru două mulţimi)

(2) Dacă *A, B, C* sunt trei mulţimi finite, atunci

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|.$$

(principiul includerii şi excluderii pentru trei mulţimi). □

12. Să se determine care este exponentul lui 2 în descompunerea în factori primi ai numărului $100!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 100$.

Soluţie: În mulţimea $\{1,2,3,...,100\}$ avem $\left[\frac{100}{2}\right]=50$ de numere divizibile cu 2; dintre aceste 50 de

numere, fiecare al doilea este divizibil cel puţin cu puterea a doua a lui 2 – sunt $\left[\frac{100}{2^2}\right]=25$ de astfel de numere; dintre acestea, fiecare al doilea este divizibil cel puţin cu 2^3. Raţionăm la fel în continuare, ţinem cont că $2^7>100$ şi că fiecare factor al lui $100!$ care este divizibil cu 2^k, dar nu şi cu 2^{k+1}, $\left(k\in\{1,2,3,4,5,6,\}\right)$, se socoteşte, în modul indicat, de *k* ori ca fiind divizibil cu $2,2^2,2^3,...,2^k$. Exponentul căutat este astfel
$\left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{2^2}\right]+...+\left[\frac{100}{2^6}\right]=50+25+12+6+3+1=97.$

Observaţie: Evident, puteam folosi direct proprietatea **P 12,** ţinând cont doar de faptul că $\left[\frac{100}{2^k}\right]=0,\forall k\in\mathbb{N},k\geq 7$; am preferat însă aici să vedem efectiv cum se ajunge la aceasta.

13. Dacă a,b,c,d sunt patru numere naturale consecutive nenule,să se arate că

$$\left[\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}{2}\right]=\left[\sqrt{a+b+c+d}\right].$$

(Dana Piciu,Concurs Gh.Ţiţeica,2006)

Soluţie: Considerăm $a=n,b=n+1,c=n+2,d=n+3,\ n\in\mathbb{N}^*$ şi notăm
$x=\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}{2},\ y=\sqrt{4n+6}$. Prin ridicări la pătrat se arată imediat că
$\sqrt{4n+5}\leq\sqrt{n}+\sqrt{n+3}<\sqrt{4n+6}$ şi $\sqrt{4n+5}\leq\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}<\sqrt{4n+6}$, de unde ajungem la
$\sqrt{4n+5}\leq x<\sqrt{4n+6}=y$; deducem astfel că $\left[\sqrt{4n+5}\right]\leq[x]\leq\left[\sqrt{4n+6}\right]=[y]$.

Deoarece $4n+6$ nu este pătrat perfect (pătratele perfecte sunt de forma $4m$ sau $8p+1$), rezultă $\left[\sqrt{4n+5}\right]=\left[\sqrt{4n+6}\right]$, adică $[x]=[y]$. □

14. Să se determine $x,y\in\mathbb{R}$ pentru care $\begin{cases}[x]-\{y\}=\sqrt{2}\\ \{x\}-[y]=\sqrt{2}\end{cases}$.

(Concurs GM, 2006)

Soluţie: Deoarece $\{y\}\in[0,1)$, din prima ecuaţie deducem că $[x]=2$, de unde $\{y\}=2-\sqrt{2}$; analog, din a doua ecuaţie avem că $[y]=1$ şi $\{x\}=\sqrt{2}-1$, deci $x=1+\sqrt{2},y=1-\sqrt{2}$. □

15. Să se arate că, dacă a,b,x,y **sunt numere reale astfel încât** $[ax+by]=[bx+ay]$**,atunci** $\min\{|a-b|,|x-y|\}<1$.

(Traian Duţă,OL Braşov,2006)

Soluţie: Folosind **P.7.** avem $[ax+by]=[bx+ay]\Rightarrow|(ax+by)-(ay+bx)|<1$, de unde $|a(x-y)+b(y-x)|<1\Rightarrow|(a-b)(x-y)|<1$, concluzia fiind imediată. □

16. Să se determine numerele naturale *n* pentru care $n=3\left[\sqrt{n}\right]+1$.

(Bulletin Math.,Canada)

Soluţie: Dacă $\left[\sqrt{n}\right]=k\in\mathbb{N}$, atunci avem $n=3k+1$, adică $\left[\sqrt{3k+1}\right]=k$, de unde $k\le\sqrt{3k+1}<k+1$; prin ridicare la pătrat, prima inegalitate conduce la $k(k-3)\le 1$şi, deoarece $k\in\mathbb{N}$, obţinem $k\in\{0,1,2,3\}$ (condiţie necesară,nu şi suficientă); este însă suficient să înlocuim valorile obţinute şi ajungem doar la $k=2$ sau $k=3$, de unde $n=7$ *sau* $n=10$. □

17. Să se determine cel mai mare număr natural *x* pentru care $2000!$ **este divizibil cu** 23^{6+x}.

(Juriu OBMJ,2000)

Soluţie: Numărul 23 este prim şi divide fiecare al 23-lea număr natural, aşadar există $\left[\frac{2000}{23}\right]=86$ numere care sunt mai mici sau egale cu 2000 şi sunt divizibile cu 23.Analog, doar trei numere mai mici sau egale cu 2000 sunt divizibile cu 23^2, deci 23^{89} divide 2000!; rezultă că cel mai mare număr natural căutat este $x=89-6=83$. □

18. Determinaţi numerele naturale n **care verifică următoarele proprietăţi:**

a) $\left[\frac{n}{12}\right]$ **este un număr natural de trei cifre, ultimele două fiind egale cu 0.**

b) $\left[\frac{n+36}{3}\right]$ **este un număr natural de patru cifre, acestea fiind 2,0,1,2 (nu neapărat în această ordine)**

(Lucian Dragomir, Concurs RMCS, 2012)

Soluţie : $\left[\frac{n}{12}\right]=\overline{a00}\Rightarrow 1200\cdot a\le n<1200\cdot a+12$ (1). Notăm cu *A* mulţimea numerelor de patru cifre formate cu cifrele 2, 0, 1, 2 ; cel mai mic element al acestei mulţimi este 1022, iar cel mai mare 2210; din $\left[\frac{n+36}{3}\right]\overset{not.}{=}k\in A$ deducem că $1022\le\frac{n+36}{3}$ şi $\frac{n+36}{3}<2211$, de unde

$3030 \le n < 6597$. Din (1) rezultă astfel că $a \in \{3,4,5\}$. Pentru $a=3$ se obţine $k \notin A$, la fel pentru $a=4$. Pentru $a=5$ se ajunge la $n \in \{6000,6001,6002\}$, numere care verifică ambele condiţii din enunţ.

19. Să se arate că dacă *m* şi *n* sunt numere naturale prime între ele, atunci

$$\left[\frac{m}{n}\right]+\left[\frac{2m}{n}\right]+\ldots+\left[\frac{(n-1)m}{n}\right]=\frac{1}{2}(m-1)(n-1).$$

(Gauss)

Soluţie: Considerăm în plan punctele $A(n,0), B(n,m), C(0,m)$. În interiorul dreptunghiului *OABC* se află $(m-1)(n-1)$ puncte de coordonate întregi; deoarece $(m,n)=1$, pe diagonala *OB* nu se află astfel de puncte, iar sub diagonală se află $\frac{(m-1)(n-1)}{2}$ puncte de forma (k,h), *cu* $k,h \in \mathbb{N}^*$. Pentru *k* fixat, există $\left[\frac{km}{n}\right]$ puncte şi astfel, în total, sub diagonala *OB* sunt $\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{km}{n}\right]$ puncte. Identificând cele două rezultate ajungem la $\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{km}{n}\right]=\frac{1}{2}(m-1)(n-1)$.□

Observaţie: Soluţia geometrică oferă şi avantajul de a remarca faptul că egalitatea din concluzie este adevărată şi dacă numerele *m* şi *n* ,,schimbă” locurile.

20. Se consideră numerele naturale *m* şi *n* , $n \ge 1$. **Să se determine numerele reale *x* pentru care**

$$[x+1]+\left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\ldots+\left[x+\frac{1}{n}\right]=m.$$

(Mircea Becheanu,ON,1988)

Soluţie: Presupunem că prin împărţirea lui *m* la *n* se obţine câtul *q* şi restul *r*. Pentru ca egalitatea din enunţ să fie adevărată, deoarece părţile întregi din membrul stâng pot diferi prin cel mult o unitate, trebuie ca cei mai mici termeni din membrul stâng să fie egali cu *q*, iar *r* dintre ei să fie egali cu $q+1$.

Dacă $r=0$, atunci $\left[x+\frac{1}{n}\right]=\left[x+\frac{2}{n}\right]=\ldots=[x+1]=q$ conduce la

$q \le x+\frac{1}{n} < x+\frac{1}{n-1} < \ldots < x+1 < q+1$, de unde $x \in \left[q-\frac{1}{n}, q\right)$.

Dacă $r \ne 0$, trebuie să avem $\left[x+\frac{1}{n}\right]=\left[x+\frac{1}{n-1}\right]=\ldots=\left[x+\frac{1}{r+1}\right]=q$ şi

$\left[x+\frac{1}{r}\right]+\left[x+\frac{1}{r-1}\right]+\ldots+[x+1]=q+1$, de unde

$q \le x+\frac{1}{n}<...<x+\frac{1}{r+1}<q+1\le x+\frac{1}{r}<...<x+1<q+2 \Rightarrow x\in\left[q+1-\frac{1}{r}, q+1-\frac{1}{r+1}\right)$. □

III. Probleme propuse.

(1) Rezolvaţi ecuaţia $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\frac{3x-2}{4}$.

(2) Pentru orice $x,y,z\in\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]$ se notează $\alpha=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}$. Determinaţi $\left[\sqrt{\alpha}\right]$.

Ioana şi Gheorghe Crăciun, Plopeni

(3) Demonstraţi că, pentru orice $x\in(0,1)$, există $n\in\mathbb{Z}$ pentru care $\frac{1}{3}\le\{nx\}<\frac{2}{3}$.

Olimpiada locală Bucureşti, 2007

(4) Arătaţi că $\left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]+\left[\frac{1-\sqrt{8n+1}}{2}\right]=0,\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Olimpiada locală Iaşi, 2007

(5) Determinaţi numărul elementelor mulţimii $M=\left\{\left[n\sqrt{2}\right]+\left[n\sqrt{3}\right] \mid n\in\mathbb{N}, n\le 2012\right\}$.

Bibliografie:

[1] Gheorghe Andrei, Ion Cucurezeanu, Constantin Caragea – Probleme de algebră, Funcţiile parte întreagă şi parte fracţionară, Editura Gil, 1996

[2] Mihai Onucu Drimbe – 200 de identităţi şi inegalităţi cu „ partea întreagă", Editura Gil, 2004

[3] (colectiv) Matematică (olimpiade şi concursuri şcolare) – Editura Paralela 45, 2009, 2010, 2011

[4] Gazeta Matematică (G.M) , colecţia 2000 – 2012

[5] Revista de Matematică din Timişoara, colecţia 2001 – 2012

[6] Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din Caraş – Severin (RMCS), colecţia 2008 – 2012