Clasa a X-a

Problema 3. Un număr $\alpha \in \mathbb{C}$ se numeşte *algebric*, dacă este rădăcină a unui polinom cu coeficienţi întregi(sau, echivalent, cu coeficienţi raţionali). *Polinomul minimal al unui număr algebric* α este un polinom monic cu coeficienţi raţionali, ireductibil peste $\mathbb{Q}$, care are numărul α ca rădăcină. Arătaţi că lungimea laturii unui decagon regulat înscris într-un cerc de rază 1 este un număr algebric. Determinaţi polinomul său minimal. Deduceţi şi descrieţi o construcţie cu rigla şi compasul a decagonului regulat înscris în cercul unitate.

Soluție și barem:

Dacă a este lungimea laturii unui decagon regulat înscris în cercul unitate, atunci $a = 2\sin\frac{\pi}{10} = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ **1p**

Considerând $z = \cos\frac{2\pi}{5} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{5}$ avem că

$a = 2 \cdot Re(z) = z + \overline{z} = z + \frac{1}{z}$ **1p**

Deoarece $z^5 = 1 \neq z$, avem că $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, de unde împărţind prin z^2 obţinem că $\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0$, sau echivalent $a^2 + a - 1 = 0$. Rezultă că a este algebric.. **2p**,

şi că $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \notin \mathbb{Q}$. Polinomul $f = X^2 + X - 1$ are coeficientul dominant 1, are coeficienţi raţionali şi este ireductibil peste $\mathbb{Q}$ deoarece nu are rădăcini raţionale(pentru un polinom de grad 2 sau 3 cu coeficienţi raţionali aceasta este o condiţie suficientă de ireductibilitate), prin urmare este polinomul minimal al lui a.. **1p**

Pentru a construi un decagon regulat înscris într-un cerc dat $\mathcal{C}(O, r)$, este suficient să construim un segment de lungime $r \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Acest lucru poate fi realizat în modul următor: construim două diametre perpendiculare $[AB]$ şi $[CD]$, construim mijlocul M al segmentului $[AO]$. Segmentul $[OM]$ are lungimea $\frac{r}{2}$, iar $[MC]$ are lungimea $\frac{r \cdot \sqrt{5}}{2}$. Construim punctul $N \in [OB] \cap \mathcal{C}(M, |MC|)$. Lungimea segmentului $[ON]$ este atunci $MN - OM$, egală cu cea a laturii decagonului regulat înscris în $\mathcal{C}(O, r)$.................... **2p**