Problema 4
Etapa 2
Clasa a VI-a

Problema 4. Fie S suma a două numere naturale nenule şi P produsul lor. Arătaţi că dacă S îl divide pe P, atunci S nu poate fi produsul a două numere prime diferite.

Ştefan Smarandache, *Bucureşti*

Soluţie Fie a, b numere naturale nenule pentru care $S = a+b$ şi $P = ab$.

Presupunem că $S = xy$, unde x, y sunt numere prime.

Atunci $xy \mid ab$ şi cum x e număr prim , avem $x \mid a$ sau $x \mid b$.

Dacă $x \mid a$, cum $x \mid a + b$ deducem că $x \mid b$. Rezultă x este un divizor comun al numerelor a şi b.

Analog y este un divizor comun al numerelor a şi b.

Aşadar, $a = xyk_1$ şi $b = xyk_2$, unde k_1, k_2 numere naturale nenule.

Atunci $S = a + b = xyk_1 + xyk_2 = xy(k_1 + k_2)$

Cum $k_1 + k_2 \geq 1 + 1$ deducem că $xy(k_1 + k_2) \geq 2xy$, adică $S \geq 2S$ ceea ce este imposibil pentru $S \neq 0$. Presupunerea făcută este falsă.