Problema 1. Determinaţi numerele $\overline{abcd}$ pentru care $\overline{abc} + a + b + c = d^5$.

* * *

Soluţie: Avem $\overline{abc} + a + b + c \geq 100 + 1 + 0 + 0$, adică $\overline{abc} + a + b + c \geq 101$ (1) şi de asemenea $\overline{abc} + a + b + c \leq 999 + 9 + 9 + 9$, adică $\overline{abc} + a + b + c \leq 1027$ (2)

Din (1) şi (2) rezultă $101 \leq \overline{abc} + a + b + c \leq 1027$, şi prin urmare $101 \leq d^5 \leq 1027$ (3).

Relaţia (3) este adevărată pentru $d = 3$ şi $d = 4$. Dacă $d \leq 2$, atunci $d^5 \leq 32 < 101$ şi dacă $d \geq 5$, atunci $d^5 \geq 3125 > 1027$.

Acum $\overline{abc} + a + b + c = 100a + 10b + c + a + b + c = 101a + 11b + 2c$.

Pentru $d = 3$ avem $101a + 11d + 2c = 243$. De aici $a \leq 2$.

Dacă $a = 2$ avem $11b + 2c = 41$ cu soluţia $b = 3$ şi $c = 4$. Dacă $a = 1$ nu avem soluţie.

Pentru $d = 4$ avem $101a + 11d + 2c = 1024$. De aici $a = 9$. Dacă $a \leq 8$, atunci $101a + 11b + 2c \leq 808 + 99 + 18 < 1024$.

Dacă $a = 9$ avem $11b + 2c = 115$ cu soluţia $b = 9$ şi $c = 8$.

Numerele căutate sunt 2343 şi 9984.