Soluția problemei 3, Clasa a X-a
Etapa 6, Ediția a VIII-a

Clasa a X-a

Etapa 6, Problema 3

Enunţ: Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată. Fie $M \in (VA)$, $N \in (VB)$, $P \in (VC)$ şi $Q \in (VD)$ astfel încât $AM = BN = VP = VQ$.

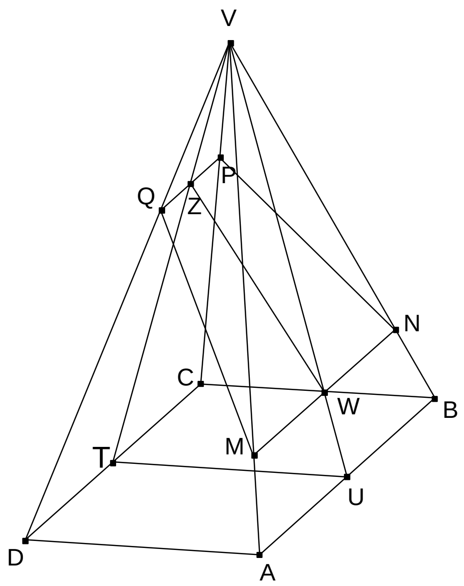
a) Să se arate că punctele M, N, P, Q sunt coplanare;

b) Să se arate că $A_{MNPQ} \geq \frac{1}{4} A_{ABCD}$.

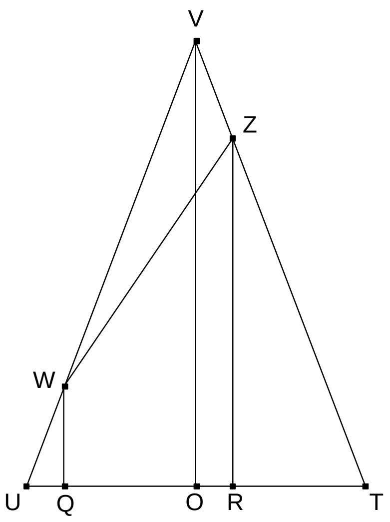
Propusă de Nicolae Bourbăcuţ, Hunedoara

Soluţie:

a) Din condiţiile iniţiale avem $QP \| CD$ şi $MN \| AB$, de unde $MN \| QP$, deci M, N, P, Q sunt coplanare.



b) Evident că $MNQP$ va fi trapez isoscel. Apoi $\frac{MN}{AB} = \frac{VM}{VA}$ şi $\frac{QP}{CD} = \frac{VQ}{VD}$. Atunci deducem că $\frac{MN}{AB} + \frac{QP}{CD} = 1$, deci $MN + QP = AB$. În aceste condiţii cerinţa punctului b) se reduce la a demonstra că înălţimea trapezului $MNPQ$ este mai mare sau egală cu jumătate din latura bazei. Dacă considerăm U, T, W, Z mijloacele segmentelor $[AB], [CD]$, $[MN]$ şi $[QP]$ atunci evident V, U, W, respectiv V, Z, T sunt coliniare şi WZ este înălţime a trapezului $MNPQ$, iar $UT = AB$. De asemenea triunghiul VUT este isoscel şi $WU = VZ$. Vom demonstra că $WZ \geq \frac{1}{2} UT$.



Fie WQ, ZR, Vo perpendiculare pe UT. Atunci

$$\frac{UQ}{UO}+\frac{TR}{TO}=\frac{UW}{UV}+\frac{TZ}{TV}=1,$$ de unde $UQ+RT=UO=\frac{AB}{2}$.

Atunci $QR=\frac{AB}{2}$ şi concluzia este evidentă din faptul că

$WZ \geq QR$.