Etapa 4, Problema 4

Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$x^4 + 1 = 2\sqrt[4]{2x-1}.$$

Marin Chirciu, Gazeta Matematică 6/2007

Soluţie.

Funcţia $f : \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \to [0, \infty)\,,\ f(x) = \sqrt[4]{2x-1}$ este strict crescătoare şi inversabilă, având inversa $f^{-1} : [0, \infty) \to \left[\frac{1}{2}, \infty\right)\,,\ f^{-1}(x) = \frac{x^4+1}{2}$. Ecuaţia din enunţ se scrie echivalent sub forma $f(x) = f^{-1}(x)$ şi, pentru că f este strict crescătoare, avem chiar $f(x) = f^{-1}(x) = x$.

Prin urmare, avem de rezolvat ecuaţia $x^4 + 1 = 2x$, adică

$$(x-1)\left(x^3 + x^2 + x - 1\right) = 0.$$

Prima paranteză se anulează când $x_1 = 1$, iar cea de-a doua se anulează cel mult o dată, deoarece funcţia $g : \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ este strict crescătoare. Cum g are semne contrare în punctele $\frac{1}{2}$ şi 1, ecuaţia mai are şi o a doua soluţie $x_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Valoarea exactă a celei de-a doua soluţii se determină utilizând formulele lui Cardano pentru rezolvarea ecuaţiei de gradul al treilea şi este

$$x_2 = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{17 + \sqrt{297}} + \sqrt[3]{17 - \sqrt{297}} - 1\right).$$