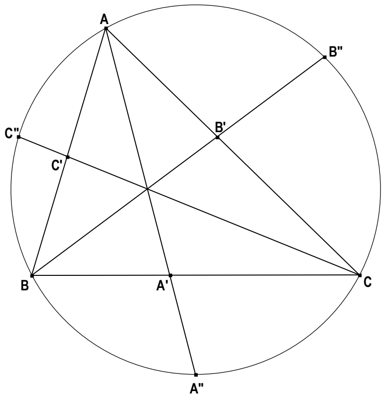
Etapa 6, Problema 2

Bisectoarele AA', BB', CC' ale triunghiului ABC intersectează cercul circumscris acestuia în punctele A'', B'' respectiv C''. Demonstrați că $\frac{AA'}{AA''}+\frac{BB'}{BB''}+\frac{CC'}{CC''}=\frac{9}{4}$ dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

***

Soluție. Fie r raza cercului.



Folosind teorema bisectoarei și puterea punctului A' față de cerc, obținem:

$$AA'\cdot A'A''=A'B\cdot A'C=\frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

$$\Rightarrow A'A''=\frac{a^2bc}{(b+c)^2}\frac{1}{AA'}$$

$$\Rightarrow \frac{AA''}{AA'}=\frac{AA'+A'A''}{AA'}=1+\frac{a^2bc}{(b+c)^2}\frac{1}{(AA')^2}.$$

Dar $AA'=\frac{2}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)}$, prin urmare $\frac{AA''}{AA'}=\frac{a^2}{4p(p-a)}+1=\frac{a^2+p(p-a)}{4p(p-a)}$. Scriem încă două relații analoage și, prin sumare, găsim că

$$\frac{AA'}{AA''}+\frac{BB'}{BB''}+\frac{CC'}{CC''}=\sum\frac{4p(p-a)}{a^2+4p(p-a)}=\sum\frac{4p(p-a)}{(b+c)^2}\le\sum\frac{4p(p-a)}{4bc},$$

(pentru inegalitate, ținem cont de faptul că $(b+c)^2\ge 4bc$). Dar

$$\sum\frac{4p(p-a)}{4bc}=\sum\cos^2\frac{A}{2}=\sum\frac{1+\cos A}{2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sum\cos A\underset{\text{Jensen}}{\le}\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cos\frac{A+B+C}{3}=\frac{9}{4}.$$

Astfel, valoarea maximă a sumei din enunț este $\frac{9}{4}$ și acestă valoare se atinge dacă și numai dacă avem egalitate în raționamentul de mai sus, deci dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.■