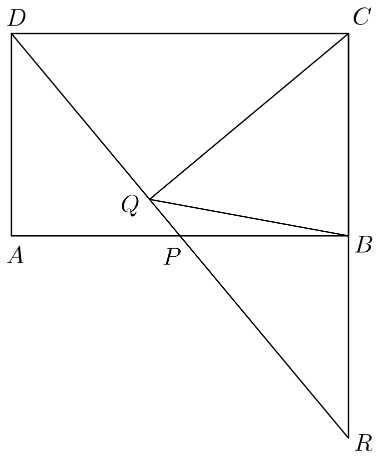
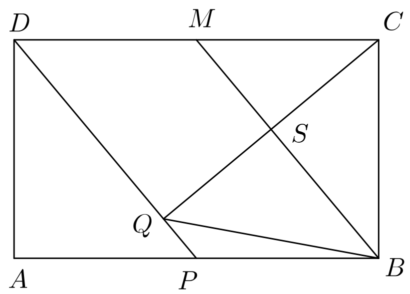
Problema 4. Fie $ABCD$ un dreptunghi, P mijlocul segmentului $[AB]$ şi Q proiecţia punctului C pe dreapta PD. Demonstraţi că triunghiul BQC este isoscel.

Olimpiadă Marea Britanie, 2003

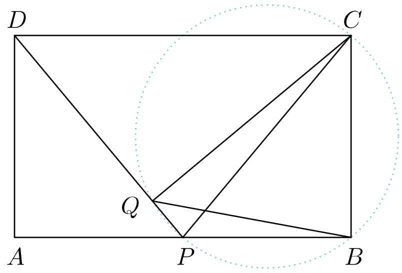
Soluţia 1: (*Radu Andreica*)
Fie R intersecţia dreptelor PD şi BC. Deoarece $PB = \frac{1}{2}CD$ şi $PB \parallel CD$, rezultă că $[PB]$ este linie mijlocie în triunghiul RCD, deci B este mijlocul segmentului CR. Atunci $[QB]$ este mediană în triunghiul dreptunghic CQR, deci $QB = \frac{1}{2}CR = CB$, de unde concluzia.



Soluţia 2: (*Alexandru Băbălău*)
Fie M mijlocul laturii $[CD]$. Având laturile opuse paralele şi congruente, patrulaterul $PBMD$ este paralelogram, deci $BM \parallel PD$. Fie $\{S\} = BM \cap CQ$. Pe de o parte avem că MS este linie mijlocie în triunghiul CQD, deci S este mijlocul segmentului $[CQ]$, pe de altă parte, $BS \parallel DQ$ şi $DQ \perp CQ$ implică $BS \perp CQ$. În triunghiul BCQ am văzut că BS este şi mediană şi înălţime, deci triunghiul BCQ este isoscel.



Soluţia 3: Distingem trei situaţii, în funcţie de poziţia punctului Q pe dreapta PD:
• dacă $Q \in (PD)$:
- triunghiurile DAP şi CBA sunt congruente (CC), deci $\angle DPA \equiv \angle CPB$;
- patrulaterul $BCQP$ este înscris în cercul de diametru $[CP]$ (unghiurile opuse $\angle CBP$ şi $\angle CQP$ sunt suplementare);
- deducem că, pe de o parte $\angle DPA \equiv \angle QCB$ (au acelaşi suplement, $\angle QPB$), pe de altă parte $\angle CQB \equiv \angle CPB$ (unghiuri făcute de laturi opuse cu diagonalele);
În concluzie, $\angle CQB \equiv \angle CPB \equiv \angle DPA \equiv \angle QCB$, deci triunghiul BQC este isoscel, de bază CQ.



• dacă Q coincide cu P:
triunghiurile dreptunghice DAP şi CBA sunt congruente (CC), deci $\angle DPA \equiv \angle CPB$; cum $m(\angle CPD) = 90°$, rezultă că $m(\angle CPB) = 45°$, deci triunghiul BCP este dreptunghic isoscel.

• dacă $P \in (DQ)$:
- triunghiurile DAP şi CBA sunt congruente (CC), deci $\angle DPA \equiv \angle CPB$;
- patrulaterul $BCPQ$ este înscris în cercul de diametru $[CP]$ (unghiurile congruente $\angle CBP$ şi $\angle CQP$ sunt unghiuri făcute de laturi opuse cu diagonalele);
- deducem că, pe de o parte $\angle QPB \equiv QCB$, pe de altă parte $\angle CQB \equiv \angle CPB$ (unghiuri făcute de laturi opuse cu diagonalele);

În concluzie, $\angle CQB \equiv \angle CPB \equiv \angle DPA \equiv \angle QPB \equiv \angle QCB$, deci triunghiul BQC este isoscel, de bază CQ.