

The 5th Romanian Master of Mathematics Competition

Day 2: Saturday, March 3, 2012, Bucharest

Language: Romanian

Problema 4. Demonstrați că există infinit de multe numere întregi pozitive n astfel încât $2^{2^n+1} + 1$ se divide prin n , dar $2^n + 1$ nu se divide prin n .

(RUSSIA) VALERY SENDEROV

Problema 5. Fiind dat un număr întreg $n \geq 3$, fiecare celulă a unui tablou pătrat de dimensiuni $n \times n$ este colorată cu una dintre $\lfloor (n+2)^2/3 \rfloor$ culori disponibile, fiecare culoare fiind folosită cel puțin odată. Demonstrați că există un dreptunghi de dimensiuni 1×3 sau 3×1 ale cărui trei celule sunt colorate cu trei culori diferite.

(RUSSIA) ILYA BOGDANOV, GRIGORY CHELNOKOV, DMITRY KHRAMTSOV

Problema 6. Fie un triunghi ABC și fie I și O centrele cercurilor înscris, respectiv circumscris. Fie ω_A cercul care trece prin B și C , și care este tangent cercului înscris în triunghiul ABC ; cercurile ω_B și ω_C sunt definite în mod similar. Cercurile ω_B și ω_C se intersectează într-un punct A' diferit de A ; punctele B' și C' sunt definite în mod similar. Demonstrați că dreptele AA' , BB' și CC' sunt concurente într-un punct aflat pe dreapta IO .

(RUSSIA) FEDOR IVLEV

Fiecare dintre cele trei probleme valorează 7 puncte.

Timp de lucru $4\frac{1}{2}$ ore.