Etapa 2, Problema 1
Dacă $x, y \in (1, 2]$, demonstraţi că

$$\log_x(3y-2) + \log_y(3x-2) \geq 4.$$

Radu Sava, Concursul "Al. Myller", 2010

Soluţie.
Cum $x \in (1, 2]$, atunci $(x-1)(2-x) \geq 0$, de unde $3x - 2 \geq x^2$. Analog se arată că $3y - 2 \geq y^2$.

Baza fiind supraunitară, obţinem că $\log_x(3y-2) \geq \log_x y^2 = 2\log_x y$, iar $\log_y(3x-2) \geq \log_y x^2 = 2\log_y x$.

Întrucât $\log_x y > 0$, $\log_y x > 0$, putem aplica inegalitatea mediilor:

$$\log_x y + \log_y x \geq 2\sqrt{\log_x y \log_y x} = 2,$$

de unde concluzia problemei.

Soluţie alternativă.
Din motive de simetrie, putem presupune că $x \leq y$; atunci $\lg(3y-2) \geq \lg(3x-2)$ şi $\frac{1}{\lg x} \geq \frac{1}{\lg y}$.

Folosind inegalitatea rearanjărilor, obţinem că

$$\frac{\lg(3y-2)}{\lg x} + \frac{\lg(3x-2)}{\lg y} \geq \frac{\lg(3x-2)}{\lg x} + \frac{\lg(3y-2)}{\lg y} = \log_x(3x-2) + \log_y(3y-2).$$

Însă $x^2 - 3x + 2 \leq 0$, prin urmare $\log_x(3x-2) \geq 2$ şi, de aici, concluzia.