

**Problema 3.** Determinații numerele naturale nenule  $a, b$  și  $c$  care satisfac relația  $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+b+c} = 1$

*Mihai Bunget, Tg. Jiu*

**Soluție:** Dacă  $a \geq 4$  avem  $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1$ .

Rezultă că  $a$  poate fi 1, 2 sau 3.

Pentru  $a = 1$  relația devine  $\frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+b+c} = 0$ , care este imposibilă.

Pentru  $a = 2$  relația devine  $\frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+b+c} = \frac{1}{2}$ .

Dacă  $b \geq 3$  avem  $\frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+b+c} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ . Rezultă că  $b$  este 1 sau 2.

Dacă  $b = 1$  avem  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3+c} = \frac{1}{2}$ , de unde  $c = 3$ .

Dacă  $b = 2$  avem  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4+c} = \frac{1}{2}$ , de unde  $c = 0$ , care nu convine.

Pentru  $a = 3$  relația dată devine  $\frac{1}{3+b} + \frac{1}{3+b+c} = \frac{2}{3}$ .

Dacă  $b \geq 1$  avem  $\frac{1}{3+b} + \frac{1}{3+b+c} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < \frac{2}{3}$ . Prin urmare, în acest caz, nu avem soluții.