Problema 2. Demonstraţi că pentru orice număr prim impar p, există un unic număr natural nenul n astfel încât numărul $n(n+p)$ să fie pătrat perfect.

Greg Oman, Ohio State University

Soluţie:
Fie p un număr prim impar. Dorim să găsim numere naturale n şi k astfel încât $n(n+p) = k^2$. Înmulţind cu 4, relaţia precedentă se scrie $4n^2+4np+p^2-p^2 = 4k^2$, adică $(2n+p)^2 - (2k)^2 = p^2$. Rezultă că $(2n+p-2k)(2n+p+2k) = p^2$. Cum $k > 0$ şi p este prim, trebuie să avem $2n+p-2k = 1$ şi $2n+p+2k = p^2$, deci, adunând cele două relaţii, obţinem că $n = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Cum p este impar, n este într-adevăr număr natural. Pentru această valoare a lui n, $n(n+p) = \left(\frac{p^2-1}{4}\right)^2$. Să mai remarcăm că $\frac{p^2-1}{4} \in \mathbb{N}$.