Problema 4. Fie S mulţimea numerelor de două cifre care nu conţin cifra 0. Două numere din S se zic *prietene* dacă cifrele lor cele mai mari sunt egale şi diferenţa dintre cifrele lor cele mai mici este egală cu 1. De exemplu, 38 şi 84 sunt prietene, 89 şi 99 sunt prietene, dar 58 şi 75 nu sunt prietene.
Determinaţi cel mai mare număr natural n pentru care există o submulţime M a lui S care are n elemente astfel încât nicicare două din elementele lui M nu sunt prietene. (Cu alte cuvinte: care e numărul maxim de elemente pe care le poate avea o submulţime care nu conţine perechi de numere prietene?)

Soluţie:
Grupăm cele 81 de numere din mulţimea S astfel:
$\{99\}$, $\{98, 89\}$, $\{97, 79\}$, $\{96, 69\}$, $\{95, 59\}$, $\{94, 49\}$, $\{93, 39\}$, $\{92, 29\}$, $\{91, 19\}$
$\{88\}$, $\{87, 78\}$, $\{86, 68\}$, $\{85, 58\}$, $\{84, 48\}$, $\{83, 38\}$, $\{82, 28\}$, $\{81, 18\}$
$\{77\}$, $\{76, 67\}$, $\{75, 57\}$, $\{74, 47\}$, $\{73, 37\}$, $\{72, 27\}$, $\{71, 17\}$
$\{66\}$, $\{65, 56\}$, $\{64, 46\}$, $\{63, 36\}$, $\{62, 26\}$, $\{61, 16\}$
$\{55\}$, $\{54, 45\}$, $\{53, 35\}$, $\{52, 25\}$, $\{51, 15\}$
$\{44\}$, $\{43, 34\}$, $\{42, 24\}$, $\{41, 14\}$
$\{33\}$, $\{32, 23\}$, $\{31, 13\}$
$\{22\}$, $\{21, 12\}$
$\{11\}$.
Este evident că dacă îl alegem pe $\overline{ab}$, cu $a \neq b$, în M, îl putem alege şi pe $\overline{ba}$: dacă $\overline{ab}$ nu are prieteni în M, nici $\overline{ba}$ nu va avea.
Observăm că un număr nu are prieteni decât pe acelaşi rând cu el, şi anume în mulţimile vecine. Nu putem alege două elemente aflate în mulţimi vecine. Aşadar, de pe rândul 1 putem alege cel mult 9 numere (cele care au ambele cifre impare), de pe rândul al doilea putem alege cel mult 8 numere (cele care au cifra mai mică impară), şi aşa mai departe, până la ultimul rând din care putem alege cel mult un număr, pe 11.
Putem aşadar alege cel mult $9 + 8 + \ldots + 1 = 45$ de numere.
Pe de altă parte, putem alege 45 de numere, şi anume pe cele care au cifra mai mică impară, astfel încât printre numerele alese să nu existe numere prietene.
În concluzie, numărul căutat este 45.