Problema 4. Se consideră numerele reale a şi b, cu $a < b$.
Spunem că funcţia $f : [a, b) \to [a, b)$ are proprietatea (P), dacă:

$$\text{pentru orice } x \in [a, b),\ f(x) \in \{x - 1, x + 1\}.$$

Demonstraţi că există o funcţie injectivă cu proprietatea (P), dacă şi numai dacă $b - a$ este un număr natural par.

Dana Heuberger

Soluţie.

„$\Leftarrow$” Există $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $b - a = 2n$. Se arată uşor că funcţia $f_0 : [a, b) \to [a, b)$, $f_0(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{dacă } x \in [a + 2k - 2, a + 2k - 1) \\ x - 1, & \text{dacă } x \in [a + 2k - 1, a + 2k) \end{cases}$, pentru orice $k = \overline{1, n}$, este o soluţie.

„$\Rightarrow$” Să observăm că dacă $b - a < 2$, atunci nu există funcţii cu proprietatea (P), deoarece pentru $x = \dfrac{a + b}{2} \in [a, b)$, avem $x - 1 \notin [a, b)$ şi $x + 1 \notin [a, b)$. Aşadar, ca să existe funcţii cu proprietatea din enunţ, trebuie ca $b - a \geqslant 2$.

Presupunem că există o funcţie injectivă f, cu proprietatea (P), pentru $b - a = 2n + r$, cu $n \in \mathbb{N}^*$ şi $r \in (0, 2)$.
Pentru $x \in [a, a + 1)$, avem $x - 1 \notin [a, b)$, deci $f(x) = x + 1$, $\forall x \in [a, a + 1)$. Aşadar $f([a, a + 1)) = [a + 1, a + 2)$.
Cum f este injectivă, trebuie ca $f([a + 2, a + 3)) \cap f([a, a + 1)) = \emptyset$. Obţinem $f(x) = x + 1$, $\forall x \in [a + 2, a + 3)$, deci $f([a + 2, a + 3)) = [a + 3, a + 4)$.
Inductiv, se arată că $\forall k = \overline{1, n}$, $\forall x \in [a + 2k - 2, a + 2k - 1)$, $f(x) = x + 1$.
Rezultă că $f([a + 2k - 2, a + 2k - 1)) = [a + 2k - 1, a + 2k)$, $\forall k = \overline{1, n}$.
I. Dacă $r \in (0, 1)$, atunci $\forall x \in [b-2, b)$, avem $x+1 \notin [a, b)$, deci $f(x) = x-1$.
Aşadar $f([b - r, b)) = f([a + 2n, b)) = [a+2n-1, b-1) \subset [a+2n-1, a+2n)$.
Dar $f([a + 2n - 2, a + 2n - 1)) = [a + 2n - 1, a + 2n)$, contradicţie cu injectivitatea lui f.
II. Dacă $r \in [1, 2)$, atunci se arată analog că, pentru ca f să fie injectivă, este necesar ca $\forall x \in [b-1, a+2n+1) \subset [a+2n, a+2n+1)$, să avem $f(x) \neq x-1$.
Dar pentru $x \in [b - 1, a + 2n + 1)$, avem $x + 1 \notin [a, b)$, deci $f(x) \neq x + 1$, contradicţie. Aşadar $b - a = 2n$.
Se arată inductiv că $\forall k = \overline{1, n}$, $\forall x \in [b - 2k + 1, b - 2k + 2)$, $f(x) = x - 1$, în consecinţă $f = f_0$.
Aşadar doar funcţia f_0 îndeplineşte ipoteza problemei, în cazul $b - a \in 2\mathbb{N}^*$.