Etapa 6, Problema 1

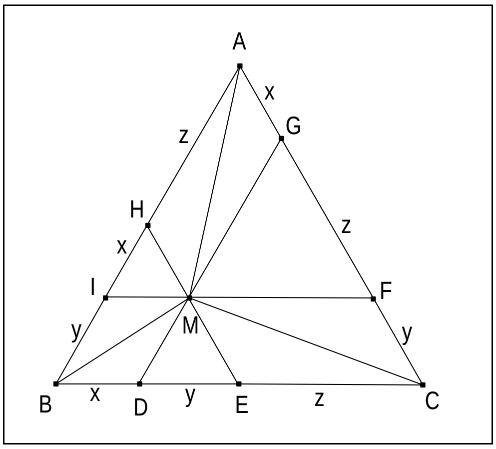
Fie ABC un triunghi echilateral şi M un punct în interiorul său. Paralela prin M la AB intersectează BC în D, iar paralela prin M la AC intersectează BC în E.

a) Demonstrați că segmentele MA, MB, MC pot fi laturi ale unui triunghi.

b) Dacă $BD = x,\ DE = y,\ EC = z,$ arătați că aria triunghiului determinat la punctul a) este egală cu $\frac{\sqrt{3}}{4}(xy + xz + yz)$.

***

Soluție.



a) Ca în figură, construim şi paralela prin M la BC; cele trei drepte determină pe laturile triunghiului punctele D, E, F, G, H şi I. Din considerente de asemănare, triunghiurile MDE, MFG şi MHI sunt echilaterale şi, astfel, fiecare latură a triunghiului mare se împarte într-o sumă de forma $x + y + z$ (vezi figura.) Folosind teorema cosinusului în triunghiurile MDB, MFC şi MAH, obținem relațiile: $MA = \sqrt{x^2 + z^2 + xz}$, $MB = \sqrt{x^2 + y^2 + xy}$ şi $MC = \sqrt{y^2 + z^2 + yz}$.

a) Ar trebui să dovedim că $MC < MB + MA$ şi analoagele. Acest lucru se poate realiza prin calcul direct, astfel:

$$MC < MB + MA \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + z^2 + yz} < \sqrt{x^2 + z^2 + xz} + \sqrt{x^2 + y^2 + xy}$$
$$\Leftrightarrow y^2 + z^2 + yz < x^2 + z^2 + xz + 2\sqrt{x^2 + z^2 + xz}\sqrt{x^2 + y^2 + xy} + x^2 + y^2 + xy$$
$$\Leftrightarrow yz - xz - xy - 2x^2 < 2\sqrt{x^2 + z^2 + xz}\sqrt{x^2 + y^2 + xy}.$$

Dacă membrul stâng este strict negativ, inegalitatea este evidentă. În caz contrar, ridicăm din nou la pătrat şi obținem echivalent

$$\left(yz - xz - xy - 2x^2\right)^2 < 4\left(x^2 + z^2 + xz\right)\left(x^2 + y^2 + xy\right)$$
$$\Leftrightarrow 4x^4 + x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 - 2xy^2z - 2xyz^2 - 2x^2yz + 4x^3y + 4x^3z <$$
$$< 4x^4 + 4x^3z + 4x^2z^2 + 4x^3y + 4x^2yz + 4xyz^2 + 4x^2y^2 + 4xy^2z + 4y^2z^2$$
$$\Leftrightarrow 0 < 3x^2z^2 + 6x^2yz + 6xyz^2 + 3x^2y^2 + 6xy^2z + 3y^2z^2,$$

ultima inegalitatea fiind evident adevărată, întrucât x, y şi z sunt strict pozitive.

b) Fie α măsura unghiului opus laturii de lungime MC în triunghiul de la a); atunci:

$$S = \frac{1}{2}MA \cdot MB \sin\alpha = \frac{1}{2}MA \cdot MB \cdot \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{1}{4}\sqrt{4MA^2 \cdot MB^2 - \left(MA^2 + MB^2 - MC^2\right)^2}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{4\left(x^2 + z^2 + xz\right)\left(x^2 + y^2 + xy\right) - \left(2x^2 - yz + xz + xy\right)^2}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{3x^2z^2 + 6x^2yz + 6xyz^2 + 3x^2y^2 + 6xy^2z + 3y^2z^2}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{3(xy + yz + zx)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + xz + yz),$$

ceea ce trebuia demonstrat.