Etapa 3, Problema 3

Se consideră mulțimea

$P=\{f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q} \mid f(1)=1,\ f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{Q}\}$.

a) Demonstrați că $f(x)=x^2$, oricare ar fi $x\in\mathbb{N}$.

b) Demonstrați că $f(x)=x^2$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Q}$.

***

Soluție.

Se obține ușor că $f(0)=0$ și că f este funcție pară.

Pentru $y=x$ și $y=2x$ se obține că $f(2x)=4f(x)$, respectiv $f(3x)=9f(x)$. Pentru $y=x$ și $x\to nx$, găsim că

$$f((n+1)x)=2f(nx)+2f(x)-f((n-1)x),\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{Q}.$$

Prin inducție, rezultă că

$$f(nx)=n^2f(x),\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{Q}.\quad(*)$$

a) Luăm $x=1$ în $(*)$ și obținem cerința.

b) Luăm $x=\frac{1}{n}$ în $(*)$ și obținem că $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Combinând cu $(*)$, deducem că $f(x)=x^2$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Q}_+$ și, ținând seama și de paritatea funcției, urmează concluzia.