Fie triunghiul $ABC$ şi $H$ un punct în interiorul său astfel încât

$$\angle HAB \equiv \angle HCB \text{ şi } \angle HBC \equiv \angle HAC.$$

Arătaţi că $H$ este ortocentrul triunghiului $ABC$.

*Manuela Prajea*, lista scurtă ONM

**Soluţie.** Fie $B'$ punctul de intersecţie a dreptelor $BH$ şi $AC$, iar $C'$ punctul de intersecţie a dreptelor $CH$ şi $AB$. Deoarece $m(\angle B'HC') = m(\angle CHB) = 180^\circ - m(\angle HBC) - m(\angle HCB) = 180^\circ - m(\angle HAC) - m(\angle HAB) = 180^\circ - m(\angle B'AC')$, rezultă că patrulaterul $AC'HB'$ este inscriptibil. Deducem că $\angle HB'C' \equiv \angle HAB \equiv \angle HCB$, de unde rezultă că şi patrulaterul $BCB'C'$ este inscriptibil. Atunci unghiurile $BB'C$ şi $BC'C$ sunt congruente. Însă din inscriptibilitatea patrulaterului $AC'HB'$ rezultă că ele sunt şi suplementare. Fiind congruente şi suplementare, unghiurile $BB'C$ şi $BC'C$ sunt drepte, deci $BB'$ şi $CC'$ sunt înălţimi în triunghiul $ABC$, deci $H$ este ortocentrul acestui triunghi.

**Observaţie.** Cum ortocentrul este în interiorul triunghiului, rezultă că triunghiul $ABC$ trebuie să fie ascuţitunghic, adică un punct $H$ cu proprietăţile din enunţ există numai dacă triunghiul $ABC$ este ascuţitunghic.