Problema 2: *Se consideră* $a,b,c\in\mathbb{C}$ *şi funcţia* $f:D\to\mathbb{C},\ f(z)=z^4+az^3+bz^2+cz+1$ *unde* $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\ |z|=1\}$. *Demonstraţi că* $|f(z)|\le 2,\ \forall z\in D$ *dacă şi numai dacă* $a=b=c=0$.

Soluţie:

Vom folosi următoarea lemă:

Lemă: Fie $r>0$ şi $u\in\mathbb{C}$ cu $|u|=r$. Dacă $x\in\mathbb{C}$ îndeplineşte condiţiile $|x-u|\le r$ şi $|x+u|\le r$ atunci $x=0$

Dacă $a=b=c=0$, atunci $|f(z)|=|z^4+1|\le|z^4|+1=2$. Reciproc, din $z\in D\Rightarrow -z\in D$ deci avem inegalităţile următoare valabile:

$$\begin{cases}|z^4+az^3+bz^2+cz+1|\le 2 & (1)\\ |z^4-az^3+bz^2-cz+1|\le 2 & (2)\end{cases}.$$

Avem $|z^4+bz^2+1|=\left|\dfrac{f(z)+f(-z)}{2}\right|\le 2$. Pentru $z=1\Rightarrow|b+2|\le 2$ şi pentru $z=i\Rightarrow|b-2|\le 2$, de unde $b=0$.

Rămânem cu $|z^4+az^3+cz+1|\le 2.\quad (3)$

Pentru $z=1\Rightarrow|a+c+2|\le 2$ şi pentru $z=-1\Rightarrow|a+c-2|\le 2$, de unde $a+c=0$.

Rămânem cu $|z^4+az^3-az+1|\le 2.\quad (4)$

Pentru $z=i\Rightarrow|a+i|\le 1$ şi pentru $z=-i\Rightarrow|a-i|\le 1$, de unde $a=0$ şi apoi concluzia.