

Problema 4.

Aflați numerele naturale x și y pentru care numărul $\sqrt{x^2 + y + 1} + \sqrt{y^2 + x + 4}$ este natural.

Marcel Chiriță

Soluție:

Trebuie să avem $\sqrt{x^2 + y + 1} \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{y^2 + x + 4} \in \mathbb{N}$. Cum $x, y \geq 0$, avem $x^2 + y + 1 \geq (x + 1)^2$ și $y^2 + x + 4 \geq (y + 1)^2$, de unde $y \geq 2x$ și $x + 3 \geq 2y$. Adunând ultimele două inegalități obținem $x + y \leq 3$. Prin verificare directă obținem soluțiile $x = y = 0$ și $x = 1, y = 2$.