Problema 1. Notăm cu $s(n)$ suma cifrelor numărului natural n. Să se determine numerele naturale n şi p, unde p este număr prim, astfel încât:

$$n + s(n) + s(s(n)) = p^3.$$

Cristina Maria Militaru, Bucureşti

Soluţie: Se ştie că restul împărţirii la 3 a unui număr natural este egal cu restul împărţirii la 3 a sumei cifrelor sale.

Atunci, dacă $n = 3a$ avem $s(n) = 3b$ şi $s(s(n)) = 3c$, de unde $n + s(n) + s(s(n)) = \mathcal{M}3$.

Dacă $n = 3a+1$ avem $s(n) = 3b+1$ şi $s(s(n)) = 3c+1$, de unde $n + s(n) + s(s(n)) = \mathcal{M}3$.

Dacă $n = 3a+2$ avem $s(n) = 3b+2$ şi $s(s(n)) = 3c+2$, de unde $n + s(n) + s(s(n)) = \mathcal{M}3$.

De aici, deducem că $p^3 = \mathcal{M}3$ şi cum p este prim deducem că $p = 3$.

Relaţia devine $n + s(n) + s(s(n)) = 27$.

Deoarece $n \leq 27$, suma maximă a cifrelor lui n este 10 şi se obţine pentru $n = 19$. Dar 19 nu este soluţie.

Aşadar, $s(n)$ are o singură cifră şi mai mult $s(s(n)) = s(n)$.

Ecuaţia devine

$$n + 2s(n) = 27.$$

Dacă n are o singură cifră, atunci $n = 9$.

Dacă $n = \overline{ab}$ atunci ecuaţia devine

$$10a + b + 2(a + b) = 27$$

sau

$$12a + 3b = 27$$

iar prin împărţire la 3 obţinem

$$4a + b = 9$$

cu soluţiile $a = 1;\ b = 5$ şi $a = 2;\ b = 1$.

În concluzie, avem $n \in \{9, 15, 21\}$ şi $p = 3$.