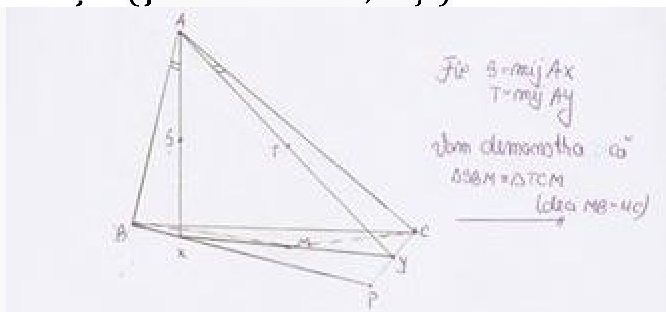
Etapa 6, Problema 2

Considerăm un triunghi ABC. Perpendiculara în B pe AB intersectează perpendiculara în C pe AC în punctul P. Două izogonale duse din vârful A taie dreptele BP şi CP în punctele X respectiv Y. Dacă M este mijlocul segmentului XY, arătați că triunghiul MBC este isoscel.

Titu Zvonaru şi Neculai Stanciu, Recreații Matematice 1/2015

Soluție (**Ştefan Obadă**, Iaşi)**.**



Fie S = mij AX, T = mij AY

Vom demonstra că $\Delta SBM \equiv \Delta TCM$ (deci MB = MC)

M = mij XY, T = mij AY $\Rightarrow$ MT – l.m. $\Delta AXY \Rightarrow MT = \frac{AX}{2}$

ΔABX dr., BS mediană $\Rightarrow BS = \frac{AX}{2}$

$\Rightarrow MT = BS$ (1)

Analog (pt. MS – l.m. și ΔAYC dr.) $\Rightarrow MS = CT$ (2)

$\widehat{SBM} = \widehat{BSX} + \widehat{XSM}$; $\widehat{CTM} = \widehat{CTY} + \widehat{YTM}$

ΔABX dr., BS mediană $\Rightarrow BS = SA = SX \Rightarrow \Delta BSA$ iso, ΔBSX iso, $\widehat{BSX} = \widehat{ABS} + \widehat{BAS}$ $\Rightarrow \widehat{BSX} = 2\widehat{BAS}$

ΔACY dr., CT mediană $\Rightarrow CT = TA = TY \Rightarrow \Delta CTA$ iso, ΔCTY iso, $\widehat{CTY} = \widehat{TAC} + \widehat{TCA}$ $\Rightarrow \widehat{CTY} = 2\widehat{CAY}$; $\widehat{BAS} = \widehat{CAY}$ (izogonale)

$SM \parallel AY \Rightarrow \widehat{XSM} \equiv \widehat{XAY}$; $TM \parallel AX \Rightarrow \widehat{YTM} \equiv \widehat{XAY}$

$\Rightarrow \widehat{BSM} \equiv \widehat{CTM}$, $MT = BS$ (1), $MS = CT$ (2) $\xrightarrow{L.U.L.} \Delta SBM \equiv \Delta TCM \Rightarrow MB = MC \Rightarrow \Delta MBC$ isoscel

Soluție alternativă.

Teorema medianei aplicată în triunghiul BXY arată că

$$4MB^2 = 2\left(BX^2 + BY^2\right) - XY^2.$$

Notând cu α măsura unghiului $\sphericalangle BAX$ şi folosind teorema lui Pitagora în triunghiul ABX şi teorema cosinusului în triunghiul ABY, avem că

$$BX^2 + BY^2 = AX^2 - AB^2 + AB^2 + AY^2 - 2AB \cdot AY \cos\left(A - \alpha\right),$$

prin urmare

$$4MB^2 = 2\left(AX^2 + AY^2 - 2AB \cdot AY\cos\left(A-\alpha\right)\right) - XY^2.$$

Ținând seama de faptul că AX și AY sunt izogonale, în mod analog rezultă că

$$4MC^2 = 2\left(AX^2 + AY^2 - 2AC \cdot AX\cos\left(A-\alpha\right)\right) - XY^2.$$

Din asemănarea triunghiurilor ABX și ACY obținem $AB \cdot AY = AC \cdot AX$, așadar $MB^2 = MC^2$, deci triunghiul MBC este isoscel.