



Etapa finală, Ediția a XIII-a, 2022

Clasa a VIII-a

Problema 3. Fie numerele naturale $m, n \geq 2$. Considerăm toate tabelele de numere reale cu m linii și n coloane de forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

cu proprietatea că suma pătratelor numerelor înscrise în fiecare coloană este egală cu 1, adică:

$$a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + \cdots + a_{mj}^2 = 1, (\forall) j = 1, 2, \dots, n.$$

Pentru fiecare linie a unui astfel de tabel, considerăm suma tuturor produselor de câte două numere înscrise pe poziții distincte ale acelei linii, definită astfel:

$$A_i = a_{i1}a_{i2} + a_{i1}a_{i3} + \cdots + a_{i1}a_{in} + a_{i2}a_{i3} + \cdots + a_{in-1}a_{in}, (\forall) i = 1, 2, \dots, m.$$

Pentru fiecare astfel de tabel, notăm cu $S = A_1 + A_2 + \cdots + A_m$. Care este cea mai mare valoare posibilă a lui S ?