Etapa 5, Problema 3

În planul xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(0,0)$, $C(1,0)$ și $D(1,1)$. Definim șirul de mulțimi M_n, $n \geq 3$ astfel: $M_3 = \{A,B,C\}$ și

$$M_{n+1} = M_n \cup \left\{ Z \in xOy \middle| \exists V,W \in M_n \text{ pentru care } \overrightarrow{VZ} = 2\overrightarrow{VW} \right\}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

Demonstrați că $D \notin M_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

Revista de Matematică din Timişoara

Soluție.

Condiția $\overrightarrow{VZ} = 2\overrightarrow{VW}$ spune, de fapt, că W este mijlocul segmentului VZ; atunci:

$$x_W = \frac{x_V + x_Z}{2} \Rightarrow x_Z = 2x_W - x_V \ (*) \Rightarrow x_Z \in \mathbb{Z}.$$

Analog, $y_Z = 2y_W - y_V \ (**) \Rightarrow y_Z \in \mathbb{Z}$, deci punctele din M_n au ambele coordonate întregi.

Se observă că fiecare dintre punctele din M_3 are cel puțin o coordonată pară și arătăm inductiv că acest lucru se întâmplă pentru orice $M_n, n \geq 3$. Presupunem că punctele din M_n au această proprietate; din relațiile $(*), (**)$ deducem că, oricare ar fi $Z \in M_{n+1}$, cel puțin unul dintre numerele x_Z, y_Z este par.

Atunci $D \notin M_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, deoarece are ambele coordonate impare.