Problema 1.

a) Demonstraţi că $x^3+y^3 \geq xy(x+y)$, oricare ar fi $x, y > 0$.

b) Demonstraţi că pentru orice $a, b, c > 0$ cu $abc = \frac{1}{3}$, are loc inegalitatea:

$$\frac{2ab}{a+b}+\frac{2bc}{b+c}+\frac{2ca}{c+a} \geq \frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}.$$

Soluţie. a) Inegalitatea este echivalentă cu $(x-y)^2(x+y) \geq 0$, care este evident adevărată.

b) $E=\frac{2ab}{a+b}+\frac{2bc}{b+c}+\frac{2ca}{c+a}=\frac{2}{3c(a+b)}+\frac{2}{3a(b+c)}+\frac{2}{3b(c+a)}$,

deci $E=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{ca+cb}+\frac{1}{ab+ac}+\frac{1}{bc+ba}\right) \overset{\text{Bergström}}{\geqslant} \frac{3}{ab+bc+ca}$. (1)

Demonstrăm că $\frac{3}{ab+bc+ca} \geqslant \frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}$, (2) deci arătăm că:

$$3\left(a^3+b^3+c^3\right) \geqslant (a+b+c)(ab+bc+ca).$$

Din a), avem $a^3+b^3 \geqslant a^2b+ab^2$, $b^3+c^3 \geqslant b^2c+bc^2$, $c^3+a^3 \geqslant c^2a+ca^2$.
În plus, din inegalitatea mediilor rezultă că $a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$.
Adunând membru cu membru ultimele patru inegalităţi, obţinem că inegalitatea (2) este adevărată, şi folosind (1) deducem că este adevărată concluzia.