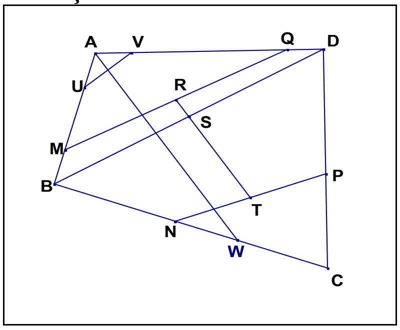
Problema 2. *Fie $ABCD$ un patrulater convex în care $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ADC$. considerăm punctele $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $P \in [CD]$ și $Q \in [DA]$ astfel încât $[MB] \equiv [QD]$ și $[NB] \equiv [PD]$. Notăm cu R, S și T respectiv mijloacele segmentelor $[MQ]$, $[BD]$ și $[NP]$. Demonstrați că R, S și T sunt coliniare.*

Soluție:



Considerăm punctele $U \in [AB]$ și $V \in [AD]$ cu $[AU] \equiv [AV] \equiv [BM]$.

Calcule vectoriale conduc la $\overrightarrow{RS} = \dfrac{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{QD}}{2} = \dfrac{\overrightarrow{AU} + \overrightarrow{AV}}{2}$, deci dreapta RS are aceeați direcție cu mediana din A a triunghiului AUV. Dar acest triunghi este isoscel, deci mediana este și bisectoare. Așadar dreapta RS are aceeași direcție cu bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAD$. Analog, dreapta ST are aceeași direcție cu bisectoarea unghiului $\sphericalangle BCD$. Problema este finaliztă dacă demonstrăm că aceste două bisectoare au aceeași direcție.

Bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAD$ intersectează pe BC în W. Atunci $m(\sphericalangle AWB) = 180^\circ - \frac{1}{2} m(\sphericalangle BAD) - m(\sphericalangle ABC)$. Deoarece suma unghiurilor unui patrulater este 360° și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ADC$, obținem că $\frac{1}{2} m(\sphericalangle BAD) + \frac{1}{2} m(\sphericalangle BCD) + m(\sphericalangle ABC) = 180^\circ$. Deci $m(\sphericalangle AWB) = \frac{1}{2} m(\sphericalangle BCD)$, adică AW este paralelă cu bisectoarea unghiului $\sphericalangle BCD$ ceea ce încheie demonstrația.