

NUMERE CELEBRE

Elev Konya Sabin Gabriel, clasa a V-a, Liceul Pedagogic "D.P.Perpessicius" ,Braila, profesor George-Florin Serban

Numere egiptene

1) Se numesc numere egiptene numerele ce se pot scrie ca suma numitorilor unor fractii avand numaratorul egal cu 1 , fractii a caror suma este un numar intreg pozitiv. De exemplu $11=2+3+6$ si $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$, 11 este un numar egiptean .

a) Aratati ca 24 este un numar egiptean .

b) Aratati ca orice numar de forma $\frac{n \cdot (n^2 + 2)}{3}$, $n \in N \setminus \{0,1,2\}$ este egiptean .

Soluție : a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \in N$. Deci

$n=2+6+12+4=24$ este egiptean.

b) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 1 \in N$

Deci numarul $x = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n + n = (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - (1 + 2 + \dots + n) + n$

$$x = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(2n^2 + 3n + 1) - 3n(n+1) + 6n}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1 - 3n - 3 + 6)}{6}$$

$$x = \frac{n(2n^2 + 4)}{6} = \frac{n(n^2 + 2)}{3} \text{ este numar egiptean .}$$

Numere aproape perfecte.

2)Un numar n se numeste aproape perfect daca $2n-1 = \sigma(n)$, unde $\sigma(n)$ reprezinta suma divizorilor naturali a lui n . Aratati ca exista o infinitate de numere aproape perfecte .

Soluție : $n = 2^x$, $x \in N$, $2 \cdot 2^x - 1 = \sigma(2^x) = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^x = 2^{x+1} - 1$ (A)

Deci exista o infinitate de numere $n = 2^x$, $x \in N$

Numere perfecte

3) Un numar se numeste perfect daca se scrie ca suma divizorilor sai mai putin el insusi . De exemplu $6=1+2+3$ este numar perfect . Aflati toate numerele perfecte care au exact 6 divizori .

Soluție : Un numar natural cu 6 divizori naturali are formele $n = p^5$ sau $n = p^2 \cdot q$.

Daca $n = p^5$, $p^5 = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4$, $p^5 = \frac{p^5 - 1}{p - 1}$, $p^6 - p^5 = p^5 - 1$, $p^5 \cdot (p - 2) = -1$

Fals. Daca $n = p^2 \cdot q$, $p^2 \cdot q = 1 + p + p^2 + pq + q$, $q \cdot (p^2 - p - 1) = p^2 + p + 1$, deci $(p^2 - p - 1) | p^2 + p + 1$, $(p^2 - p - 1) | p^2 - p - 1$, $(p^2 - p - 1) | 2p + 2$, dar $p^2 - p - 1 = p(p - 1) - 1$ **impar**, deci $(p^2 - p - 1) | p + 1$, **rezulta** $p^2 - p - 1 \leq p + 1$ $p^2 - 2p - 2 \leq 0$, **p prim**. **Daca p=2 rezulta** $-2 \leq 0$ (A). **Daca** $p \geq 3$ **atunci** $p^2 - 2p - 2 = p(p - 2) - 2 \geq 3 \cdot 1 - 2 = 1$ **fals**. **Deci p=2, q=7, n=28**.

Numere pitagorice .

4) Trei numere naturale se numesc pitagorice daca verifica ecuatia $x^2 + y^2 = z^2$. **Aratati ca cel puțin un numar x, y sau z este divizibil cu 3.**

Soluție : Solutiile ecuatiei sunt : $x = t \cdot (u^2 - v^2)$, $y = t \cdot 2uv$, $z = t \cdot (u^2 + v^2)$, $t, u, v \in N$. **Presupun ca t, u si v nu sunt divizibile cu 3 (in caz contrar reiese ca x, y sau z este divizibil cu 3).** **Daca** $u = 3n + 1$ **si** $v = 3m + 1$ **atunci** $x : 3$. **Daca** $u = 3n + 2$ **si** $v = 3m + 2$ **atunci** $x : 3$. **Daca** $u = 3n + 1$ **si** $v = 3m + 2$ (sau invers) **atunci** $x : 3$.

Numere Armstrong .

5) Un numar natural n avand k cifre se numeste Armstrong daca este egal cu suma cifrelor sale ridicate la puterea k . Aflati cel mai mic numar Armstrong de trei cifre .

Soluție : $\overline{abc} = a^3 + b^3 + c^3$. **Daca a=1**, $\overline{1bc} = 1 + b^3 + c^3$, $100 + 10b + c = 1 + b^3 + c^3$, $99 + 9b = b^3 - b + c^3 - c = b(b - 1)(b + 1) + c(c - 1)(c + 1)$ **par**, $99 + 9b = 9 \cdot (b + 11)$ **par**, **deci b impar**. **Daca b=1**, $\overline{11c} = 2 + c^3$, $108 + c = c^3$, $c(c - 1)(c + 1) = 108$. **Daca c=4**, $60 = 108$ (F), **daca** $c \geq 5$, $c(c - 1)(c + 1) = 108 \geq 120$ (F). **Daca b=3**, $\overline{13c} = 28 + c^3$, $102 = c(c - 1)(c + 1)$. **Daca c=4**, $60 = 102$ (F), **daca** $c \geq 5$, $c(c - 1)(c + 1) = 102 \geq 120$ (F). **Daca b=5**, $\overline{15c} = 126 + c^3$, $24 = c(c - 1)(c + 1)$. **Daca c=3**, $24 = 24$ (A). **Daca** $c \geq 4$, $c(c - 1)(c + 1) = 24 \geq 60$ (F). **Deci am gasit numarul 153**.

Numere bune .

6) Spunem ca un numar natural este "bun" daca pentru orice divizor a a lui n , a+1 este divizor al lui n+1. Determinati toate numerele naturale bune .

Olimpiada Rusia 2014

Soluție : Vom arata ca toate numerele bune sunt 1 si toate numerele prime impare .
Daca $n = 1$, $1 | 1$ si $2 | 2$ (A). **Daca** $n = 2$, $1 | 2$, $2 | 3$ (F). **Daca** $n = p$ prim impar, $1 | p$, $2 | (p + 1)$ (A) si $p | p$, $p + 1 | p + 1$ (A). Dar $1 | n$, $2 | n + 1$, deci n impar . Presupun ca n este un numar

compus, fie a un divizor propriu a lui n . Deci $a|n$, $a|a$ rezulta $a|n-a$. Dar $a+1|n+1$, $a+1|a+1$, $a+1|n-a$. Atunci $(n-a):a$, $(n-a):(a+1)$, $(n-a):[(a+1),a] = a \cdot (a+1)$
 $n-a = a(a+1)x$, $x \in \mathbb{N}$, $n = a(a+1)x + a$, $n = a \cdot [(a+1)x + 1]$, $[(a+1)x + 1] | n$,
 $[(a+1)x + 2] | n+1$, $[(a+1)x + 2] | a(a+1)x + a + 1$, $[(a+1)x + 2] | (a+1)x + 2$,
 $[(a+1)x + 2] | a(a+1)x + 2a - a(a+1)x - a - 1$, $[(a+1)x + 2] | a - 1$, $(a+1)x + 2 \leq a - 1$
Fals deoarece $(a+1)x + 2 > a - 1$, $(a+1)x > ax > a$, $2 > -1$. Deci n nu poate fi
numar compus.

Numere factoriale .

7) **Numerele naturale** $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ se numesc **numere factoriale** .

Aflati cel mai mare numar natural n stiind ca $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 30 : 10^n$.

Soluție : “Daca p este numar prim atunci exponentul lui p in produsul

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ este egal cu $[\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + [\frac{n}{p^3}] + \dots$ “

Exponentul lui 2 in $30!$ este $[\frac{30}{2}] + [\frac{30}{4}] + [\frac{30}{8}] + [\frac{30}{16}] = 15 + 7 + 3 + 1 = 26$

Exponentul lui 5 in $30!$ este $[\frac{30}{5}] + [\frac{30}{25}] = 6 + 1 = 7$. Deci $30! = 2^{26} \cdot 5^7 \cdot x$, $(x, 10) = 1$
 $30! = 2^7 \cdot 5^7 \cdot 2^{19} \cdot x = 10^7 \cdot 2^{19} \cdot x : 10^7$, $n = 7$.

Numere palindromice .

8) **Un numar se numeste palindrom** daca este egal cu rasturnatul sau . Aflati
numerele palindromice de 3 cifre care au 9 divizori naturali .

Soluție : $\overline{abc} = \overline{cba}$, numerele sunt de forma \overline{aba} , $\overline{aba} = p^2 \cdot q^2$, p si q prime sau
 $\overline{aba} = p^8$. **Daca** $\overline{aba} = p^2 \cdot q^2$, n este patrat perfect $u(\overline{aba}) \in \{1, 4, 5, 6, 9\}$. Se gaseste
 $\overline{aba} = 11^2 \cdot 2^2 = 121 \cdot 4 = 484$ **palindrom** . **Daca** $\overline{aba} = p^8$, $p = 2$, $\overline{aba} = 2^8 = 256$ (F),
daca $p \geq 3$, $\overline{aba} \geq 3^8 = 6561$ (F).

Numere automorfe .

9) **Un numar automorf este** **numarul natural** al carui **patrat se termina in aceleasi**
cifre ce compun numarul insusi . Aflati cel mai mic numar automorf de doua cifre .

Soluție : **Daca** $\overline{ab}^2 = \overline{cab}$, $u(\overline{ab}^2) = u(\overline{cab}) = u(b^2) = b \in \{0, 1, 5, 6\}$, $\overline{ab}^2 - \overline{ab} = 100c$,
 $\overline{ab} \cdot (\overline{ab} - 1) = 100c$. **Daca** $\overline{ab} = 10$, $90 = 100c$ (F). **Daca** $\overline{ab} = 11$, $110 = 100c$ (F). **Daca**
 $\overline{ab} = 15$, $210 = 100c$ (F). **Daca** $\overline{ab} = 16$, $240 = 100c$ (F). **Daca** $\overline{ab} = 20$, $380 = 100c$

(F).Daca $\overline{ab} = 21$, $420 = 100c$ (F). Daca $\overline{ab} = 25$, $600 = 100c$ $c=6$ (A). Deci $\overline{ab} = 25$, $25^2 = 625$ (A) .

Numere Brown.

10)Perechile de numere intregi $[m,n]$ cu proprietatea $n!+1=m^2$. Aratati ca ecuatia are cel putin trei solutii .

Solutie: Se gasesc solutiile : Se dau valori lui m , $(m,n) \in \{(5,4),(11,5),(71,7)\}$

Numere Euclid .

11) Numerele naturale de forma p_{n+1} , unde p_n este produsul primilor n numere naturale prime , se numesc numere Euclid . Aratati ca un numar Euclid nu poate fi patrat perfect.

Soluție : p_n este de forma $4k+2$, deci p_{n+1} va fi de forma $4k+3$, fals deoarece un patrat perfect nu poate avea forma $4k+3$.

Numere puternice .

12)Un numar puternic este un intreg pozitiv cu proprietatea ca daca este divizibil cu numarul prim p atunci este divizibil si cu p^2 . Aflati toate numerele puternice de trei cifre care au 6 divizori naturali .

Soluție : Numerele cu 6 divizori sunt de forma $p^2 \cdot q$ sau p^5 . Daca $n = p^2 \cdot q$ fals deoarece $n:q$ dar n nu este divizibil cu q^2 . Daca $n = p^5$, $p=3$, $n=243$.
Daca $p \geq 5$ atunci $n \geq 3125$ fals . Deci $n=243$.

Numere rare .

13)Numerele non-palindromice n cu proprietatea ca $R(n)+n$ si $R(n)-n$ sunt ambele patrate perfecte , unde $R(n)$ este reversul lui n . Aflati numerele de doua cifre rare .

Soluție : $\overline{ba} + \overline{ab}$ si $\overline{ba} - \overline{ab}$ sunt patrate perfecte. Deci $\overline{ba} + \overline{ab} = 11 \cdot (a+b)$ p.p

Rezulta $a+b=11$. Dar $\overline{ba} - \overline{ab} = 9 \cdot (b-a)$ rezulta $b-a$ este p.p , $b-a \in \{0,1,4\}$

Daca $b-a=0$, $b=a=5,5$ (F) . Daca $b-a=1$, atunci $a=5$ si $b=6$, numarul 56 este rar.

Daca $b-a=4$, atunci $a=3,5$ (F) .

Bibliografie : “Enciclopedia matematica a claselor de numere intregi “ , Marius Coman.