Problema 1. Determinaţi toate tripletele (a, b, c) de numere naturale pentru care $3^a + 3^b + 3^c$ este pătrat perfect.

*Şahin Emrah*Olimpiadă juniori Turcia, 2017

Soluţie:
Fie a, b, c, n numere naturale astfel încât $3^a + 3^b + 3^c = n^2$. Deoarece $3^a + 3^b + 3^c$ este număr impar, n trebuie să fie impar. Dacă $n = 2k + 1$, cu $k \in \mathbb{N}$, atunci $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1$ este congruent cu 1 modulo 8 (numărul $k(k+1)$ - fiind produs de două numere consecutive - este par). Aşadar trebuie ca $3^a+3^b+3^c \equiv 1 \pmod 8$. Dacă $m = 2j$ este număr par, atunci $3^m = 9^j = (8 + 1)^j \equiv 1 \pmod 8$, iar dacă $m = 2j + 1$ este impar, atunci $3^m = 3 \cdot 9^j = 3(8 + 1)^j \equiv 3 \pmod 8$. Aşadar, fiecare dintre numerele 3^a, 3^b, 3^c este congruent cu 1 sau 3 modulo 8, iar singura posibilitate ca suma lor să fie congruentă cu $1 \pmod 8$ este ca $3^a \equiv 3^b \equiv 3^c \equiv 3 \pmod 8$, adică a, b, c să fie toate impare.
Datorită simetriei putem presupune $a \leq b \leq c$. Atunci $3^a + 3^b + 3^c = 3^a(1 + 3^{b-a} + 3^{c-a})$. Pentru ca acest număr să fie pătrat perfect, trebuie ca exponentul lui 3 din descompunerea sa în factori primi să fie par. Dar cum a este impar, acest lucru este posibil numai dacă $3 \mid 1+3^{b-a}+3^{c-a}$, ceea ce se întâmplă numai dacă $b-a = c-a = 0$. Aşadar trebuie ca a, b, c să fie numere impare egale.
Această condiţie este şi suficientă: dacă $a = b = c = 2i + 1$, atunci $3^a + 3^b + 3^c = 3 \cdot 3^{2i+1} = (3^{i+1})^2$.
În concluzie, tripletele căutate sunt cele de forma $(2i + 1,\ 2i + 1,\ 2i + 1)$, cu $i \in \mathbb{N}$.