

**CRITERII DE DIVIZIBILITATE**

ABSTRACT. Materialul conține câteva reguli generale de divizibilitate, altele decât cele din manual.

Lecția se adresează clasei a VI-a

Data: 6 decembrie 2010

Autor: Ion Cicu, Școala nr.96, București

În general, pentru a stabili dacă un număr natural  $a$  divide numărul natural  $N$  trebuie să împărțim  $N$  la  $a$ . Dacă restul împărțirii este 0 atunci  $a$  divide pe  $N$ .

În unele cazuri putem găsi reguli care să ne permită să decidem mai ușor dacă  $a$  divide  $N$ . Aceste reguli se vor numi criterii de divizibilitate.

Așadar, prin criteriu de divizibilitate înțelegem o regulă, relativ simplă, prin care să putem decide dacă un număr natural  $a$  divide numărul natural  $N$ .

Exemple de astfel de reguli sunt criteriile de divizibilitate cu 2, cu 5 sau cu 10.

**Criteriu 1.** Un număr natural  $N$  se divide cu 2, cu 5 sau cu 10 dacă și numai dacă numărul format din cifra unităților se divide cu 2, cu 5 sau cu 10.

Un alt criteriu cunoscut este cel referitor la divizibilitatea cu 3 sau cu 9

**Criteriu 2.** Un număr natural  $N$  se divide cu 3 sau cu 9 dacă suma cifrelor lui  $N$  dă un număr divizibil cu 3 sau cu 9.

Pentru ceea ce urmează este bine să ne amintim scrierea unui număr natural în baza 10. Avem

$$N = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0} = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0,$$

unde  $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

**Criteriu 3.** Un număr natural  $N$  se divide cu  $2^2$  (4), cu  $5^2$  (25) sau cu  $10^2$  (100) dacă numărul format din ultimele două cifre ale lui  $N$  se divide cu  $2^2$  (4), cu  $5^2$  (25) sau cu  $10^2$  (100).

**Justificare.** Folosind scrierea în baza 10 a unui număr natural avem

$$N = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0} = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

observăm că toți termenii de la  $a_k \cdot 10^k$  până la  $a_2 \cdot 10^2$  se divid cu 4, cu 25 sau cu 100.

Atunci este evident că numărul  $N$  se va divide cu 4, cu 25 sau cu 100 dacă

$$a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 = \overline{a_1 a_0}$$

se divide cu 4, cu 25 sau cu 100.

Acest criteriu se poate generaliza astfel

**Criteriu 4.** Un număr natural  $N$  se divide cu  $2^p$ , cu  $5^p$  sau cu  $10^p$  dacă numărul format din ultimele  $p$  cifre ale lui  $N$  se divid cu  $2^p$ , cu  $5^p$  sau cu  $10^p$ .

În cele ce urmează vom prezenta câteva criterii de divizibilitate fără demonstrație. Le vom însoți însă de exemple.

**Criteriu 5.** (divizibilitate cu 7) Se scrie numărul  $N$  în baza 10. Se înlocuiește baza 10 cu 3 și se fac calculele. Dacă numărul obținut se divide cu 7, atunci numărul  $N$  se divide cu 7.

**Exemplu 1.** Stabiliți dacă numărul 51744 se divide cu 7.

**Soluție.** Avem

$$51744 = 5 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 4$$

Acum, înlocuim baza 10 cu 3 și facem calculele.

$$5 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 7 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^1 + 4 = 511$$

Deoarece 511 se divide cu 7 ( $7 \cdot 73 = 511$ ) înseamnă că 51744 se divide cu 7.

**Criteriu 6.** (divizibilitate cu 7, variantă) Prima cifră din stânga a numărului  $N$  se înmulțește cu 3. Rezultatul obținut se împarte la 7 și se păstrează restul. Restul obținut se adună cu cifra imediat următoare și se înmulțește din nou cu 3. Numărul obținut se împarte la 7 și se păstrează restul. Procedăm la fel până ajungem la ultima cifră. La acest moment nu mai înmulțim cu 3. Dacă numărul obținut se divide cu 7, atunci  $N$  se divide cu 7.

**Exemplu 2.** Stabiliți dacă numărul 517496 se divide cu 7.

**Soluție.** Avem succesiv

$$\begin{aligned} 5 \cdot 3 &= 15 \\ 15 &= 7 \cdot 2 + 1 \\ 1 + 1 &= 2 \\ 2 \cdot 3 &= 6 \\ 6 &= 7 \cdot 0 + 6 \\ 6 + 7 &= 13 \\ 13 \cdot 3 &= 39 \\ 39 &= 7 \cdot 5 + 4 \\ 4 + 4 &= 8 \\ 8 \cdot 3 &= 24 \\ 24 &= 7 \cdot 3 + 3 \\ 3 + 9 &= 12 \\ 12 \cdot 3 &= 36 \end{aligned}$$

## ARITMETICĂ

3

$$36 = 7 \cdot 5 + 1$$
$$1 + 6 = 7$$

Acum, deoarece 7 se divide cu 7 rezultă că numărul 517496 se divide cu 7.

**Criteriu 7.** (divizibilitate cu 7, 11 sau 13) Numărul  $N$  se împarte, de la dreapta spre stânga, în grupe de câte trei cifre (ultima grupă poate avea mai puțin de 3 cifre). Dacă diferența dintre sumele grupelor luate din doi în doi dau un număr divizibil cu 7, 11 sau 13, atunci numărul  $N$  se divide cu 7, 11 sau 13.

**Exemplu 3.** Stabiliți dacă numărul  $N = 2420066285$  se divide cu 7, cu 11 sau cu 13.

**Soluție.** Numărul descompus în grupe de câte trei cifre, de la dreapta spre stânga arată așa

$$2420066285$$

Sumele grupelor luate din doi în doi sunt

$$2 + 66 = 68$$

$$420 + 285 = 705$$

Diferența acestor sume este

$$705 - 68 = 637$$

Acum, deoarece 637 se divide cu 7 ( $637 = 7 \cdot 91$ ) și cu 13 ( $637 = 13 \cdot 49$ ) și nu se divide cu 11 ( $637 = 11 \cdot 627 + 10$ ) înseamnă că numărul  $N$  se divide cu 7 și cu 13, dar nu se divide cu 11.

**Criteriu 8.** (divizibilitate cu 3, cu 7 sau cu 19) Din numărul  $N$  se elimină ultimele două cifre. Numărul format din aceste cifre se înmulțește cu 4 și se adună la numărul rămas după eliminare. (*Putem repeta procedeul până obținem un număr mai mic.*) Dacă numărul astfel obținut se divide cu 3, cu 7 sau cu 19, atunci numărul  $N$  se divide cu 3, cu 7 sau cu 19.

**Exemplu 4.** Stabiliți dacă numărul  $N = 636538$  se divide cu 7 sau cu 19.

**Soluție.** Numărul obținut după eliminarea ultimelor două cifre este 6365, iar numărul format de ultimele două cifre este 38. Avem

$$6365 + 38 \cdot 4 = 6517$$

Trebuie văzut dacă numărul 6517 se divide cu 7 sau cu 19. Procedăm ca mai sus.

$$65 + 17 \cdot 4 = 133$$

Deoarece

$$133 = 7 \cdot 19$$

înseamnă că 133 se divide și cu 7 și cu 19. Atunci 6517 se divide și cu 7 și cu 19, iar de aici rezultă că  $N$  se divide și cu 7 și cu 19.

Încheiem expunerea cu un criteriu general de divizibilitate.

**Criteriu 9.** (Criteriul general de divizibilitate) Numărul natural  $N$  se divide cu numărul natural  $a$  dacă suma dintre cifrele sale înmulțite cu restul împărțirii la  $a$  a puterii lui 10 asociată cifrei este un număr divizibil cu  $a$ .

Nu vom da demonstrația acestui criteriu, deși este foarte simplă. Vom prezenta un exemplu.

**Exemplu 5.** Stabiliți dacă numărul 85462 este divizibil cu 247.

**Soluție.** Avem  $85462 = 8 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$ .

Acum

$$10^4 = 10000 = 247 \cdot 40 + 120$$

$$10^3 = 1000 = 247 \cdot 4 + 12$$

$$10^2 = 100 = 247 \cdot 0 + 100$$

$$10^1 = 10 = 247 \cdot 0 + 10$$

$$10^0 = 1 = 247 \cdot 0 + 1.$$

$$\text{Calculăm acum } 8 \cdot 120 + 5 \cdot 12 + 4 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 2 \cdot 1 = 1482.$$

Deoarece 1482 se divide cu 247 ( $1482 = 247 \cdot 6$ ), atunci și 85462 se divide cu 247.