Comentarii la Olimpiada de Matematică TUYMAADA 2013, Ediţia XX – Yakutsk, Republica Sakha (Yakuţia)

ABSTRACT. Comments on the problems of TUYMAADA Mathematical Olympiad 2013, Yakutia.

Data: 25 iulie 2013.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti. (*Danton sur lie*)

1. Introducere

Această prezentare, însoţită de comentarii personale asupra Olimpiadei de Matematică TUYMAADA 2013, Yakuţia, este opinia personală a autorului.[1]

Voi indica prin culoarea **roşie** eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea **verde** varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea **albastră** pentru comentariile personale.

2. Juniori Ziua 1 (19 iulie 2013 – 4 probleme/5 ore)

Subiectul (1)**.** 100 *de grămezi de pietre sunt puse pe o masă. Doi jucători îşi fac mutările alternativ. Fiecare mutare constă în a înlătura un număr nenul de pietre de pe masă, astfel încât cel puţin o grămadă să rămână neatinsă. Jucătorul care nu mai poate face o mutare, pierde. Determinaţi, pentru fiecare poziţie iniţială, cine dintre jucători, primul sau al doilea, are o strategie câştigătoare.*

K. Kokhas

Soluţie. **Interpretarea confirmată a fi corectă este că o grămadă "există" chiar când este vidă** – să ne închipuim că fiecare grămadă este un *sertar*, şi că dacă nu luăm pietre dintr-un sertar (care poate fi vid), înseamnă că nu am atins acel sertar. În aceste condiţii este clar că pierde acel jucător care este primul care goleşte un sertar (dar nu toate), căci celălalt jucător poate lua atunci toate pietrele rămase pe masă, lăsând neatinse sertarele goale.

Prin urmare câştigă acel jucător X care lasă, după mutarea sa, toate sertarele conţinând acelaşi număr de pietre. Aceasta este deoarece celălalt jucător Y nu poate face acelaşi lucru, căci nu poate atinge toate sertarele; înseamnă că, după mutarea sa, (măcar) unul dintre sertare s va conţine strict mai puţine pietre decât un altul. Dar acum X egalizează iarăşi sertarele, lăsând sertarul s neatins. **Strategia de câştig este deci, pentru oricare dintre jucători, de a egaliza conţinutul sertarelor.**

Prin urmare, dacă la începutul jocului sertarele conţin un număr egal de pietre, câştigă al doilea jucător (căci primul este silit să strice echilibrul), iar în toate celelalte cazuri câştigă primul jucător (egalizând conţinutul sertarelor). Numărul 100 nu joacă niciun rol; nici măcar paritatea sa. □

[1]Subiecte şi rezultate complete la `http://guas.info/competit/tuyme.htm`, `http://guas.info/competit/tuymaada.htm`

Subiectul (2)**.** *Fie $ABCDEF$ un hexagon convex, cu $AC \parallel DF$, $BD \parallel EA$ şi $CE \parallel FB$. Demonstraţi că*

$$AB^2 + CD^2 + EF^2 = BC^2 + DE^2 + FA^2.$$

N. SEDRAKYAN

Soluţie. (Luis González – AoPS)[2] Perpendicularele din B, D şi F, respectiv pe $DF \parallel AC$, $FB \parallel CE$ şi $BD \parallel EA$ sunt evident concurente în ortocentrul H al $\triangle BDF$. Dar atunci $AB^2 - BC^2 = HA^2 - HC^2$, $CD^2 - DE^2 = HC^2 - HE^2$ şi $EF^2 - FA^2 = HE^2 - HA^2$. Prin însumarea acestor expresii obţinem

$$AB^2 - BC^2 + CD^2 - DE^2 + EF^2 - FA^2 = 0,$$

exact ceea ce era cerut. □

Soluţie Alternativă. (Vectorială) Asociind vârfurilor hexagonului vectori de poziţie (cu v fiind vectorul de poziţie asociat unui punct V), putem profita de scrierea $XY^2 = \|y - x\|^2 = \langle y - x, y - x\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle y, x\rangle$. Dacă scriem aceste relaţii pentru laturile hexagonului, egalitatea cerută revine la

$$\langle b, a\rangle + \langle d, c\rangle + \langle f, e\rangle = \langle b, c\rangle + \langle d, e\rangle + \langle f, a\rangle,$$

adică

$$\langle b, a - c\rangle + \langle d, c - e\rangle + \langle f, e - a\rangle = 0.$$

Dar dacă luăm originea pe perpendiculara din B pe AC, atunci $b \perp a - c$, şi deci $\langle b, a - c\rangle = 0$. Consecinţe similare pentru ceilalţi doi termeni. Aşadar este suficient să luăm originea în ortocentrul triunghiului BDF, şi atunci toţi cei trei termeni sunt nuli, şi egalitatea cerută este demonstrată.

De fapt ne putem lipsi de ideea de a considera ortocentrul, lăsând originea într-un punct arbitrar. Relaţia echivalentă obţinută se mai poate scrie şi (folosind $\langle b, a - c\rangle = \langle b, (a - e) + (e - c)\rangle$) ca

$$\langle b - f, a - e\rangle + \langle b - d, e - c\rangle = 0.$$

Dar triunghiurile BDF şi EAC sunt asemenea, într-un raport de asemănare ρ, şi atunci $\dfrac{BD}{AE} = \dfrac{FB}{EC} = \rho$, de unde $b - d = \rho(a - e)$ şi $b - f = -\rho(e - c)$, prin urmare

$$\langle b - f, a - e\rangle + \langle b - d, e - c\rangle = -\rho\langle e - c, a - e\rangle + \rho\langle a - e, e - c\rangle = 0.$$

Încă o dovadă, dacă mai era nevoie, a forţei acestor produse scalare. □

Subiectul (3)**.** *Pentru numerele reale pozitive a, b, demonstraţi inegalitatea*

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \frac{2}{3}\,\frac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}.$$

A. KHRABROV

[2]Bazat pe faptul cunoscut că locul geometric al punctelor din plan care au diferenţa pătratelor distanţelor la două puncte fixe X, Y constantă este o dreaptă perpendiculară pe XY. Reciproc, înseamnă că pentru puncte aflate pe o aceeaşi perpendiculară pe XY, diferenţa pătratelor distanţelor la X, Y este constantă.

Soluţie. (Laurenţiu Ploscaru) Fie $x = \dfrac{a+b}{2}$, $y = \sqrt{ab}$; de unde $x \geq y > 0$. Inegalitatea se scrie atunci

$$3y \leq \sqrt{2x^2 - y^2} + \frac{2y^2}{x}, \text{ sau, în mod echivalent, } (2x^2 - y^2)x^2 \geq (3xy - 2y^2)^2,$$

ceea ce se factorizează ca $(x-y)^2\left(x^2 + 2y(x-y)\right) \geq 0$. □

Soluţie Alternativă. Cu alte cuvinte, $GM \leq \frac{1}{3}QM + \frac{2}{3}HM$, unde GM, QM, HM sunt mediile geometrică, quadratică, respectiv (h)armonică ale numerelor a şi b. Scriind inegalitatea sub forma $QM - GM \geq 2(GM - HM)$, şi cu substituţia $b = x^2a$ ($x > 0$), inegalitatea se scrie în formele echivalente

$$\sqrt{\frac{1+x^4}{2}} - x \geq 2\left(x - \frac{2x^2}{1+x^2}\right) = \frac{2x(1-x)^2}{1+x^2},$$

$$\frac{\dfrac{1+x^4}{2} - x^2}{\sqrt{\dfrac{1+x^4}{2}} + x} \geq \frac{2x(1-x)^2}{1+x^2},$$

$$\frac{(1-x^2)^2}{\sqrt{\dfrac{1+x^4}{2}} + x} \geq \frac{4x(1-x)^2}{1+x^2}.$$

Factorizând cu $(1-x)^2$, putem continua cu

$$(1+x)^2(1+x^2) \geq 4x\left(\sqrt{\frac{1+x^4}{2}} + x\right),$$

$$1 + 2x - 2x^2 + 2x^3 + x^4 \geq 4x\sqrt{\frac{1+x^4}{2}},$$

$$\left((1+x^4) - 4x\sqrt{\frac{1+x^4}{2}} + 2x^2\right) + \left(2x - 4x^2 + 2x^3\right) \geq 0,$$

$$2\left(\sqrt{\frac{1+x^4}{2}} - x\right)^2 + 2x\left(1-x\right)^2 \geq 0.$$

Această ultimă formă, fiind o sumă de pătrate, este adevărată. Egalitate se obţine evident doar dacă $x = 1$, adică pentru $a = b$. □

Remarcă. Nu sunt prea mulţumit de soluţia mea de mai sus, care de fapt nu capturează esenţa problemei, nefiind decât o simplă verificare. Sper să existe ceva mai "insightful"; de asemenea, mă întreb în ce măsură se poate extinde la $n > 2$ variabile pozitive, dincolo de inegalităţile clasice

$$\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}{n}} \geq \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \geq \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k}}.$$

Subiectul (4)**.** *Vârfurile unui graf conectat* ***nu*** *pot fi colorate cu mai puţin de* $n+1$ *culori (astfel încât vârfuri adiacente să aibă culori diferite).*

Demonstraţi că se pot şterge $\dfrac{n(n-1)}{2}$ *muchii din graf, astfel ca graful să rămână conectat.*

V. DOLNIKOV

Remarcă. În fine, o problemă de grafuri enunţată în propriul limbaj al teoriei grafurilor – nu cu prieteni, drumuri, companii aeriene, ş.a.m.d. Îmi place!

Soluţie. (Palmer Mebane – AoPS) Ideea soluţiei (pentru grafuri finite) este bazată pe următorul rezultat

> **Propoziţia 1.3.2.** [REINHARD DIESTEL – *Graph Theory*]
> Vârfurile unui graf conectat (finit) G pot fi enumerate $v_1, \ldots, v_{|G|}$, astfel încât $G_i := G[v_1, \ldots, v_i]$ (unde $G[v_1, \ldots, v_i]$ este subgraful indus de vârfurile $v_1, \ldots, v_i$) să fie conectat – şi el – pentru fiecare $1 \leq i \leq |G|$.[3]

Colorăm acum graful, trecând prin fiecare vârf al enumerării de mai sus, pe rând. Îi dăm lui v_1 culoarea numărul 1. Apoi, la fiecare alt pas i, îi dăm lui v_i culoarea cu cel mai mic număr care face colorarea lui G_i validă. Prin urmare, de câte ori îi dăm unui vârf v_i o culoare k, ştim că v_i este adiacent cu cel puţin câte un vârf colorat cu culoarea $1, 2, \ldots, k-1$. Când $k \geq 3$, ştergem toate muchiile care conectează pe v_i cu vârfuri de culoare mai mare decât 1; şi astfel graful G_i încă rămâne conectat ("the greedy algorithm").

La sfârşit, pentru $G_{|G|} = G$, vom fi folosit toate culorile $1, 2, 3, \ldots, n+1$ cel puţin odată fiecare, deci am şters cel puţin $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ muchii. Graful final a rămas conectat, şi am reuşit. □

Soluţie Alternativă. Cu alte cuvinte, se cere să arătăm că putem şterge (cel puţin) $\dfrac{n(n-1)}{2}$ muchii ale unui graf conectat $G = (V, E)$, de număr cromatic $\chi(G) > n$, astfel ca G să rămână conectat. Deşi – după cum s-a dovedit – problema se referă la grafuri finite, teorema DE BRUIJN–ERDÖS ne permite să considerăm şi grafuri infinite.[4]

> **Teoremă.** Un graf infinit G poate fi colorat cu k culori (astfel încât vârfuri adiacente să aibă culori diferite) dacă şi numai dacă oricare subgraf finit al său poate fi astfel colorat cu k culori.

Consecinţa acestei teoreme este că dacă G este infinit, cu $\chi(G) > n$, atunci există un subgraf finit H al său, cu $\chi(H) > n$ (problema conectării lui H nu se pune, căci putem considera componenta sa conectată de număr cromatic maximal, care va trebui să fie mai mare decât n). Atunci ştergem $\dfrac{n(n-1)}{2}$ muchii din H, şi cum G era conectat, adăugând vârfurile din $G - H$ graful rămâne conectat. Vom considera deci în cele ce urmează G a fi un graf finit.

[3] Începem cu oricare vârf drept v_1, şi presupunem inductiv că $v_1, \ldots, v_i$ au fost astfel alese, pentru un $i < |G|$. Acum alegem un vârf oarecare v din $G - G_i$. Deoarece G este conectat, el conţine un drum $P = v$–v_1 care conectează v şi v_1. Fie v_{i+1} ultimul vârf din P care încă mai aparţine lui $G - G_i$; atunci v_{i+1} are un vecin în G_i. Faptul că grafurile G_i sunt conectate rezultă acum prin inducţia asupra lui i.

[4] De remarcat că soluţia de mai sus "nu merge" în acest caz. Procedând vârf după vârf nu este obligatoriu să ajungem la un moment în care $n+1$ culori au trebuit să fi fost folosite, chiar dacă $\chi(G) > n$, dacă ordinalul mulţimii vârfurilor este mai mare decât ω (primul ordinal transfinit). Chiar dacă introducem o bună ordonare pe mulţimea vârfurilor, luarea succesorului nu este garantată să epuizeze mulţimea. Conceptele legate de infinit sunt periculoase, şi metodele obişnuite, printre care inducţia, nu mai pot fi aplicate chiar în acelaşi fel.

Un rezultat cunoscut este

Propoziţia 5.2.1. [REINHARD DIESTEL – *Graph Theory*]
Fie m numărul de muchii ale unui graf finit G; atunci[5]

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

Un alt rezultat (trivial) este $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, unde $\Delta(G)$ este cel mai mare grad al vreunui vârf din G. În cazul nostru avem

$$2m \geq \left(\chi(G) - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = n^2 + n,$$

deci $m \geq \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2} + n$ (şi cel puţin ştim acum că un graf cu $\chi(G) \geq n+1$ are suficient de multe muchii pentru a putea şterge $\dfrac{n(n-1)}{2}$ dintre ele). Pe de altă parte, vom avea şi $\Delta(G) \geq n$.

Să observăm şi că $\dfrac{n(n-1)}{2}$ este cel mai mare număr disponibil, în general; pentru $G = K_{n+1}$ (graful complet cu $n+1$ vârfuri $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}$) putem înlătura $\dbinom{n+1}{2} - n = \dfrac{n(n-1)}{2}$ muchii (rămânând cu drumul Hamiltonian (conectat) $v_1 v_2 \ldots v_n v_{n+1}$ cu n muchii), dar nu mai multe.

Soluţie prin inducţie după $|G|+n$. Cazurile iniţiale sunt triviale, aşa încât trecem imediat la pasul de inducţie. Trebuie să existe un vârf v care nu deconectează graful când este înlăturat.[6] Fie graful $G - v$. Dacă $\chi(G - v) > n$, atunci din ipoteza de inducţie putem şterge din $G - v$ o mulţime M de muchii, având $|M| \geq \dfrac{n(n-1)}{2}$, aşa încât să rămână conectat, dar atunci şi graful $G' = (V, E \setminus M)$ va fi conectat. Dacă nu, atunci deoarece $\chi(G-v) \geq \chi(G)-1 > n-1$ (de fapt atunci $\chi(G-v) = n$), vom putea şterge din $G - v$ o mulţime M de muchii, având $|M| \geq \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$. Dar evident avem $\deg v \geq n$, şi deci putem şterge cel puţin $n - 1$ muchii incidente în v din $G' = (V, E \setminus M)$, care rămâne deci conectat după ştergerea a (cel puţin) $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ muchii. $\square$

Remarcă. Soluţia de mai sus este în mod deliberat extrem de detaliată. Ideea de inducţie este clară, şi mersul demonstraţiei este la fel de clar, dar am dorit să iau toate precauţiile de rigoare.

Într-adevăr, felul în care este scrisă soluţia oficială impune presupunerea tacită că graful G este considerat **finit**. Diversele consideraţii care se dovedesc suficiente pentru cazul finit nu mai funcţionează pentru cazul infinit, şi până una-alta trebuie să ne referim la teorema adâncă citată mai sus.

[5] Fie o colorare a lui G cu $k = \chi(G)$ culori. Atunci G are câte cel puţin o muchie între oricare două clase de culori; altfel am fi putut folosi aceeaşi culoare pentru fiecare din cele două clase. Aşadar $m \geq \dfrac{k(k-1)}{2}$, care este de fapt chiar concluzia pe care o dorim.

[6] Graful G fiind conectat are un "spanning tree", ale cărui frunze (cel puţin două) nu pot fi "cut-vertex", adică nu pot deconecta graful. Să observăm că acest fapt nu mai este necesarmente adevărat pentru un graf conectat infinit, de exemplu un drum deschis la ambele capete. Se poate spune chiar mai mult, vezi
`http://carbon.ucdenver.edu/egethner/MikeAlbertson/Papers/AlbertsonBerman_CutVertices_1991.pdf`

3. Juniori Ziua 2 (20 iulie 2013 – 4 probleme/5 ore)

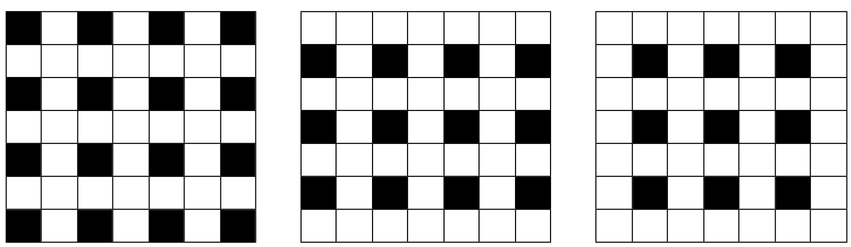
Subiectul (5). *Fiecare faţă a cubului de dimensiuni $7 \times 7 \times 7$ este partiţionată în pătrate unitate. Care este numărul maxim de pătrate care pot fi alese, astfel încât oricare pereche de pătrate dintre cele alese să nu aibă niciun punct în comun?*

A. Chukhnov

Soluţie. Subpartiţionăm fiecare pătrat unitate 1×1, de pe fiecare faţă, în patru pătrăţele $1/2 \times 1/2$. Fiecărui pătrat unitate îi asociem pătrăţelele cu care are cel puţin un punct în comun. Astfel, un pătrat aflat într-un colţ al unei feţe va avea asociate $1 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 15$ pătrăţele, iar oricare altul va avea asociate $1 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 16$ pătrăţele.

Oricare două dintre pătratele alese vor trebui să aibă mulţimile de pătrăţele asociate disjuncte. Cum în total sunt $4 \cdot 6 \cdot 7^2 = 1176$ pătrăţele, notând cu x numărul pătratelor de colţ alese şi cu y numărul celorlalte pătrate alese, va trebui să maximizăm $x + y$, sub condiţia $15x + 16y \leq 1176$. Să mai observăm şi că dacă alegem un pătrat de colţ, atunci niciunul din celelalte două pătrate din acelaşi colţ nu mai poate fi ales, deci $x \leq 8$. Cum $1176 = 8 \cdot 15 + 66 \cdot 16$, rezultă că $\max\{x + y \mid 15x + 16y \leq 1176\} = 8 + 66 = 74$ (şi chiar toată suprafaţa cubului va fi astfel partiţionată între mulţimi disjuncte de pătrăţele asociate pătratelor alese).

Un model este uşor de realizat, cu câte o pereche de feţe opuse din fiecare tip de mai jos; în total $2 \cdot 16 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 9 = \boxed{74}$ pătrate alese.



De fapt, din observaţia imediată că pentru un astfel de model întreaga suprafaţă a cubului este utilizată, fiind partiţionată între mulţimi disjuncte de pătrăţele asociate pătratelor alese, modelul prezentat mai sus este unic (până la rotaţii şi simetrii). O generalizare imediată pentru cubul de dimensiuni $n \times n \times n$, cu $n = 2k + 1$ impar, ajunge în mod cu totul similar la numărul maxim de pătrate ce pot fi alese $\boxed{2((k+1)^2 + k(k+1) + k^2) = (3n^2 + 1)/2}$. □

Remarcă. Metoda aceasta de subdiviziune devine, încetul cu încetul, clasică; vezi Problema 2 din Testul de Selecţie Seniori de anul trecut, care o folosea cu mare succes. O altă armă, bună de adăugat în panoplia de război cu problemele de geometrie combinatorică ... Soluţia oficială foloseşte drept argument faptul că un singur pătrat unitate poate fi ales dintr-un pătrat 2×2 sau un "colţar" de trei pătrate, şi partiţionează suprafaţa cubului în 74 astfel de regiuni.

Subiectul (6). *Trinoame pătratice cu coeficienţii dominanţi (strict) pozitivi sunt scrise în celulele unui tablou de dimensiuni 6×6. Cei 108 de coeficienţi ai lor sunt numerele întregi între -60 şi 47 (fiecare număr este folosit exact odată). Demonstraţi că, în cel puţin una dintre coloane, suma trinoamelor din acea coloană este un polinom (trinom) cu rădăcini reale.*

K. Kokhas & F. Petrov

Soluţie. Fie $a_{i,j}x^2 + b_{i,j}x + c_{i,j}$ trinomul scris în celula (i, j) a tabloului, unde $a_{i,j} > 0$ pentru $1 \leq i, j \leq 6$, şi

$$\{a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq 6\} = \{-60, -59, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 46, 47\}.$$

Fie $P_j(x) = \alpha_j x^2 + \beta_j x + \gamma_j = \left(\sum_{i=1}^{6} a_{i,j}\right) x^2 + \left(\sum_{i=1}^{6} b_{i,j}\right) x + \left(\sum_{i=1}^{6} c_{i,j}\right)$ trinomul care este suma trinoamelor din coloana j, pentru $1 \leq j \leq 6$, şi fie polinomul $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \sum_{j=1}^{6} P_j(x)$. Dacă presupunem că niciunul dintre trinoamele $P_j(x)$ nu are rădăcini reale, atunci $P_j(x) > 0$ pentru orice $1 \leq j \leq 6$ şi $x \in \mathbb{R}$ (căci coeficienţii lor dominanţi sunt pozitivi). Dar atunci *a fortiori* $P(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ceea ce este echivalent cu $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$.

Avem evident $\alpha + \beta + \gamma = -\sum_{k=1}^{60} k + \sum_{k=1}^{47} k = -702 = -v$. Atunci însă

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (v + \alpha + \gamma)^2 - 4\alpha\gamma = (v - \alpha + \gamma)^2 + 4v\alpha > 0,$$

căci $v > 0$ şi $\alpha > 0$. Am obţinut o clară contradicţie.

Alternativ, avem $P(1) = \alpha + \beta + \gamma = -702 < 0$, deci măcar pentru un indice $1 \leq j \leq 6$ avem şi $P_j(1) < 0$, ceea ce forţează $P_j(x)$ să aibă rădăcini reale. □

Remarcă. Singurul lucru care a contat este deci că limita negativă (-60) a valorilor coeficienţilor a fost mai mare în valoare absolută decât cea pozitivă (47), ceea ce a dus la $v > 0$. Nu-mi place folosirea de astfel de valori arbitrare. Şi Laurenţiu Ploscaru face observaţia cât de slabe sunt condiţiile date.

Subiectul (7)**.** *Rezolvaţi ecuaţia $p^2 - pq - q^3 = 1$ în numere prime.*

A. Golovanov

Soluţie. Este suficient să ştim că q este prim. Scriind ecuaţia ca $p^2 - qp - q^3 - 1 = 0$, discriminantul ei va fi $\Delta = q^2 + 4q^3 + 4 = a^2$ pentru ca p să poată fi întreg.

- Cazul $q = 2$ duce la $p^2 - 2p - 9 = 0$, fără rădăcini întregi.
- Cazul $\boxed{q = 3}$ duce la $p^2 - 3p - 28 = 0$, cu rădăcina întreagă $\boxed{p = 7}$ (prim).

Altfel, avem $q^2(4q+1) = a^2 - 4 = (a-2)(a+2)$. Dar cel mai mare divizor comun al factorilor $a - 2$ şi $a + 2$ este un divizor al lui 4, şi cum avem $q > 2$, trebuie ca q^2 să dividă unul din aceşti doi factori. Cum avem şi $q > 3$, nu se poate ca $q^2 \mid a - 2$, căci atunci am avea $q^2 < 4q + 1$, absurd. Rămâne doar cazul $q^2 \mid a + 2$, şi atunci $a - 2 \mid 4q + 1$, deci $q^2 \leq 4q + 5$. Aceasta este posibil numai pentru $q = 5$, ceea ce duce la $p^2 - 5p - 126 = 0$, cu rădăcina întreagă pozitivă $p = 14$, care însă nu este număr prim (dar este singurul alt întreg pozitiv pentru q prim!).

Am găsit astfel toate soluţiile întregi, nu numai prime, ale ecuaţiei date, sub singura condiţie ca q să fie număr prim. □

Soluţie Alternativă. (AoPS) O soluţie care chiar foloseşte primalitatea lui p.

Pasul 1. Lemă. Dacă $p \equiv 2 \pmod 3$, atunci p nu poate divide $q^2 - q + 1$.

Demonstraţie. Presupunem $p \mid q^2 - q + 1$ (deci p este impar); atunci $p \mid q^3 + 1$, deci $q^3 \equiv -1 \pmod p$, şi atunci $q^6 \equiv 1 \pmod p$. Fie ν ordinul multiplicativ al lui q modulo p; atunci $\nu \mid 6$, şi $\nu \mid p - 1$ (din mica teoremă a lui Fermat). Aceasta forţează $\nu = 2$ (căci $\nu = 1$ înseamnă $q \equiv 1 \pmod p$, deci $-1 \equiv q^3 \equiv 1 \pmod p$, forţând $p = 2$, absurd), şi deci $q \equiv -1 \pmod p$.

Dar atunci $0 \equiv q^2 - q + 1 \equiv 1 + 1 + 1 = 3 \pmod p$, forţând $p = 3$, absurd. ■

Pasul 2. Se vede uşor că $p > 3$; atunci $p^2 = pq + q^3 + 1 > 2q + q^2 + 1 = (q + 1)^2$, de unde $p > q + 1$; dar atunci din $p \mid q^3 + 1 = (q + 1)(q^2 - q + 1)$ rezultă $p \mid q^2 - q + 1$, aşadar $p \equiv 1 \pmod 3$.

Pasul 3. Dacă $q \equiv 1 \pmod 3$, atunci $1 = p^2 - pq - q^3 \equiv -1 \pmod 3$, contradicţie. Dacă $q \equiv 2 \pmod 3$, atunci $1 = p^2 - pq - q^3 \equiv 0 \pmod 3$, iar contradicţie. Aşadar $q = 3$ (singurul moment unde este folosită primalitatea lui q), pentru care se calculează uşor $p = 7$. Deci $(p, q) = (7, 3)$ este unica soluţie. □

Soluţie Alternativă. În mod simetric (şi caraghios), este suficient şi doar să ştim că p este prim. Scriind ecuaţia ca $p^2 = q^3 + pq + 1 > q^2$, obţinem $p > q$, ba chiar $p > q + 1$ (căci $(p, q) = (3, 2)$ nu este soluţie). Scriind acum ecuaţia ca $p(p-q) = q^3+1 = (q+1)(q^2-q+1)$, rezultă că $p \mid q^2-q+1$, deci există numărul natural k astfel ca $q^2 - q + 1 = kp$ şi deci $p - q = k(q + 1)$, adică $p = (k + 1)q + k$. Cu această substituţie obţinem $q^2 - q + 1 = k((k + 1)q + k) = k(k + 1)q + k^2$, adică $q^2 - (k^2 + k + 1)q - k^2 + 1 = 0$. Discriminantul acestei ecuaţii va fi deci $\Delta = (k^2 + k + 1)^2 + 4k^2 - 4$, trebuind a fi pătrat perfect pentru ca q să fie întreg. Dar $\Delta = (k^2 + k + 3)^2 - 4k - 12 < (k^2 + k + 3)^2$ pentru orice $k > 0$, şi în acelaşi timp $\Delta = (k^2+k+2)^2+2k^2-2k-7 > (k^2+k+2)^2$ pentru orice $k > 2$. Valoarea $k = 2$ duce la $q^2 - 7q - 3 = 0$, fără soluţii întregi, dar $k = 1$ duce la $q^2 - 3q = 0$, cu soluţia întreg pozitiv prim $\boxed{q = 3}$, pentru care $\boxed{p = 7}$ (prim). □

Remarcă. Soluţia oficială nu-şi dă seama de această supra-calificare a condiţiilor problemei, apucând-o pe o altă cale (ca în soluţia alternativă de mai sus) unde primalitatea ambelor p şi q este folosită. Oricum, supra-condiţionarea enunţului unei probleme este unul dintre acele lucruri care îmi repugnă.

Subiectul (8)**.** *Punctul A_1 este situat pe perimetrul unui patrulater convex $ABCD$ astfel încât dreapta AA_1 partiţionează patrulaterul în două regiuni de arii egale. Punctele B_1, C_1 şi D_1 sunt definite în mod similar.*
Demonstraţi că aria patrulaterului $A_1B_1C_1D_1$ este mai mare decât un sfert din aria lui $ABCD$.

L. EMELYANOV

Soluţie (Oficială). Presupunem $S_{ACD} > S_{ABC}$ (cazul de egalitate este chiar mai simplu). Atunci $A_1 \in [CD]$ şi $C_1 \in [DA]$. Vom avea

$$\frac{DA_1}{A_1C} = \frac{S_{DA_1A}}{S_{A_1CA}} = \frac{\frac{1}{2}S_{ABCD}}{\frac{1}{2}S_{ABCD} - S_{ABC}},$$

cu relaţii similare pentru punctul C_1. Prin urmare $\dfrac{DA_1}{A_1C} = \dfrac{DC_1}{C_1A} > 1$; înseamnă că $A_1C_1 \parallel AC$ şi $A_1C_1 > \dfrac{1}{2}AC$.

Rezultă că fiecare diagonală a patrulaterului $A_1B_1C_1D_1$ este paralelă cu una dintre diagonalele lui $ABCD$, şi mai mare decât jumătatea ei. Formula cunoscută $S = \dfrac{1}{2}d_1d_2 \sin\angle(d_1, d_2)$, care exprimă aria unui patrulater în funcţie de diagonalele sale şi unghiul pe care îl fac, implică atunci $S_{A_1B_1C_1D_1} > \dfrac{1}{4}S_{ABCD}$. □

Soluţie. (Laurenţiu Ploscaru) Dreptele AA_1 şi CC_1 se intersectează într-un punct T, datorită condiţiei asupra ariilor. Avem atunci $[ATC_1] = [CTA_1]$, de unde $[A_1AC] = [C_1CA]$, aşadar $A_1C_1 \parallel AC$. Analog $B_1D_1 \parallel BD$. Aceste rezultate implică imediat faptul că două dintre punctele A_1, B_1, C_1, D_1 vor fi pe aceeaşi latură a lui $ABCD$, şi că înfăşurătoarea convexă a punctelor este $A_1B_1C_1D_1$. Mai departe, fără a restrânge generalitatea, putem presupune $C_1, D_1 \in AB$. Folosind formula de arie în funcţie de diagonale, este suficient să arătăm că $4A_1C_1 \cdot B_1D_1 > AC \cdot BD$, sau, din asemănarea triunghiurilor, că $4AD_1 \cdot BC_1 > AB^2$. Folosind condiţia asupra ariilor, obţinem că $[BCC_1] = \dfrac{1}{2}[ABCD] > \dfrac{1}{2}[ABC]$, de unde $2BC_1 > AB$ şi analog $2AD_1 > AB$; demonstraţia este completă. □

4. Seniori Ziua 1 (19 iulie 2013 – 4 probleme/5 ore)

Subiectul (1)**.** 100 *de grămezi de pietre sunt puse pe o masă. Doi jucători îşi fac mutările alternativ. Fiecare mutare constă în a înlătura un număr nenul de pietre de pe masă, astfel încât cel puţin o grămadă să rămână neatinsă. Jucătorul care nu mai poate face o mutare, pierde. Determinaţi, pentru fiecare poziţie iniţială, cine dintre jucători, primul sau al doilea, are o strategie câştigătoare.*

K. Kokhas

Soluţie. Vezi Subiectul 1, Ziua 1 Juniori. □

Subiectul (2)**.** *Punctele X şi Y se află în interiorul rombului $ABCD$, astfel încât punctul Y se află în interiorul patrulaterului convex $BXDC$, şi*

$$2\angle XBY = 2\angle XDY = \angle ABC.$$

Demonstraţi că dreptele AX şi CY sunt paralele.

S. Berlov

Soluţie (Oficială). Deoarece $\angle XBY = \angle ABD = \angle CBD$, rezultă că punctul X se află în interiorul $\triangle ABD$, iar punctul Y în interiorul $\triangle CBD$. Fie $\angle ABX = \alpha$; atunci $\angle DBY = \alpha$, căci adunând $\angle XBD$ la fiecare obţinem unghiurile egale $\angle ABD$ şi $\angle XBY$. În mod similar deducem că putem nota $\angle XBD = \angle YBC = \beta$, $\angle ADX = \angle BDY = \gamma$, $\angle XDB = \angle YDC = \delta$.

Fie Y' simetricul lui Y faţă de centrul rombului. Pentru a demonstra cerinţa, este suficient să verificăm coliniaritatea punctelor A, X şi Y', deci $\angle BAX = \angle BAY'$. Aceasta poate fi uşor demonstrată aplicând teorema Ceva trigonometrică; aplicată punctului X ne dă

$$\frac{\sin BAX \cdot \sin\gamma \cdot \sin\beta}{\sin DAX \cdot \sin\delta \cdot \sin\alpha} = 1.$$

Pentru a o aplica punctului Y', considerăm reflecţia întregului triunghi BDC faţă de centrul rombului. Atunci

$$\frac{\sin BAY' \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin DAY' \cdot \sin\alpha \cdot \sin\delta} = 1.$$

Din aceste două relaţii obţinem $\dfrac{\sin BAX}{\sin DAX} = \dfrac{\sin BAY'}{\sin DAY'}$. Egalitatea de care avem nevoie, $\angle BAX = \angle BAY'$, rezultă acum imediat, căci ambii membri sunt de forma $\dfrac{\sin(BAD-\theta)}{\sin\theta} = \sin BAD(\cot\theta - \cot BAD)$, iar această expresie în θ este injectivă (ia fiecare valoare exact odată), deci unghiurile în cauză sunt egale. □

Soluţie Alternativă. (Luis González – AoPS) Din $\angle XBY = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle DBC$ deducem $\angle ABX = \angle DBY$. În mod similar obţinem $\angle ADX = \angle BDY$. Dacă notăm cu Z conjugatul izogonal al lui X în raport cu $\triangle ABD$, vom avea egalităc tile$\angle DBZ = \angle ABX = \angle DBY$ şi $\angle BDZ = \angle ADX = \angle BDY$. Prin urmare patrulaterul $BYDZ$ este un "zmeu" (*kite*), ceea ce implică faptul că Z este reflecţia lui Y faţă de BD. Atunci, din motive evidente de simetrie, $ACYZ$ este un trapez isoscel cu laturile neparalele AZ şi CY, de unde rezultă $\angle ACY = \angle CAZ = \angle CAX$. Finalmente, aceasta implică $AX \parallel CY$. □

Subiectul (3)**.** *Vârfurile unui graf conectat* ***nu*** *pot fi colorate cu mai puţin de $n+1$ culori (astfel încât vârfuri adiacente să aibă culori diferite).*

Demonstraţi că se pot şterge $\dfrac{n(n-1)}{2}$ muchii din graf, astfel ca graful să rămână conectat.

V. Dolnikov

Soluţie. Vezi Subiectul 4, Ziua 1 Juniori. □

Subiectul (4)**.** *Pentru numere reale pozitive x, y, z cu $xyz = 1$, demonstraţi că*

$$\frac{x^3}{x^2+y} + \frac{y^3}{y^2+z} + \frac{z^3}{z^2+x} \geq \frac{3}{2}.$$

A. GOLOVANOV

Soluţie. Folosim identitatea $\dfrac{a^3}{a^2+b} = a - \dfrac{ab}{a^2+b}$. Din inegalitatea mediilor avem $\dfrac{ab}{a^2+b} \leq \dfrac{ab}{2a\sqrt{b}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{b}$. Inegalitatea de demonstrat se transformă în

$$\frac{3}{2} + \frac{xy}{x^2+y} + \frac{yz}{y^2+z} + \frac{zx}{z^2+x} \leq x + y + z,$$

iar conform cu cele de mai sus avem

$$\frac{3}{2} + \frac{xy}{x^2+y} + \frac{yz}{y^2+z} + \frac{zx}{z^2+x} \leq \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right),$$

deci este suficient să demonstrăm că

$$x + y + z \geq \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right).$$

Aceasta se arată aplicând inegalitatea CAUCHY-SCHWARZ

$$3(x+y+z) \geq \left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right)^2,$$

şi acum, notând $\sigma = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$, este suficient să arătăm că $2\sigma^2 - 3\sigma - 9 \geq 0$. Dar din inegalitatea mediilor $\sigma = \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \geq 3\sqrt[6]{xyz} = 3$, şi atunci finalmente obţinem $2\sigma^2 - 3\sigma - 9 = (\sigma - 3)(2\sigma + 3) \geq 0$. □

Remarcă. Michael Rozenberg (**arqadi**), specialistul numărul unu în inegalităţi pe AoPS (a cărui idee am împrumutat-o pentru soluţia de mai sus), face comentariul "very old trick"! O remarcă personală este că se vede că era suficient să se impună doar restricţia $xyz \geq 1$.

5. Seniori Ziua 2 (20 iulie 2013 – 4 probleme/5 ore)

Subiectul (5)**.** *Demonstraţi că orice polinom de grad patru poate fi reprezentat în forma $P(Q(x)) + R(S(x))$, unde P, Q, R şi S sunt trinoame pătratice.*

A. Golovanov

Soluţie. Fie polinomul de grad patru $k_4x^4 + k_3x^3 + k_2x^2 + k_1x + k_0$, cu $k_4 \neq 0$. Căutăm trinoame pătratice

$P(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma, Q(x) = ax^2+bx+c, R(x) = \alpha' x^2+\beta' x+\gamma', S(x) = a'x^2+b'x+c'.$

Prin dezvoltarea expresiilor $P(Q(x))$ şi $R(S(x))$ şi apoi identificarea coeficienţilor, obţinem un sistem de cinci ecuaţii cu cinci necunoscute $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma + \gamma'$, a cărui matrice (şi matrice extinsă) este

$$M = \left[\begin{array}{ccccc|c} a^2 & a'^2 & 0 & 0 & 0 & k_4 \\ 2ab & 2a'b' & 0 & 0 & 0 & k_3 \\ b^2+2ac & b'^2+2a'c' & a & a' & 0 & k_2 \\ 2bc & 2b'c' & b & b' & 0 & k_1 \\ c^2 & c'^2 & c & c' & 1 & k_0 \end{array}\right]$$

Avem, printr-un calcul imediat, $\det M = 2aa'(ab' - a'b)^2$, care dorim să fie nenul, la fel ca şi aa'. În plus trebuie să ne asigurăm şi că $\alpha\alpha' \neq 0$. Aşadar prima condiţie este asupra corpului (comutativ) $\mathbb{K}$ în care trăiesc coeficienţii polinoamelor. Va trebui să avem $2 \neq 0$, deci caracteristica lui $\mathbb{K}$ trebuie să fie diferită de 2 (şi se vede că altminteri pentru $k_3 \neq 0$ nu vom putea avea soluţie, deci condiţia asupra caracteristicii este şi necesară). Apoi, va trebui $b/a \neq b'/a'$. Deoarece vom avea $\alpha = a'(2k_4b' - k_3a')(ab' - a'b)$ şi $\alpha' = a(2k_4b - k_3a)(ab' - a'b)$, va trebui şi $b/a \neq k_3/2k_4$, şi $b'/a' \neq k_3/2k_4$. Acestea sunt toate condiţiile necesare, care impun deci ca b/a, b'/a' şi $k_3/2k_4$ să fie elemente distincte din $\mathbb{K}$. Dar orice corp de caracteristică diferită de 2 are cel puţin trei elemente. Obţinem atunci o soluţie (unică pentru fiecare alegere judicioasă a parametrilor a, a', b, b' şi c, c'). În plus, desigur că în loc de a scrie sistemul de cinci ecuaţii, putem rezolva pe rând, aproape ecuaţie cu ecuaţie; este doar mai comod şi mai direct să procedăm ca mai sus. □

Remarcă. O alegere cel puţin ciudată de problemă; metoda autorului este relativ diferită, dar tot prin identificare de coeficienţi. Mi se spune însă că, în timpul probei de concurs, li s-a comunicat concurenţilor că pot considera coeficienţii a fi numere reale. Acum, pentru $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sau $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, polinomul iniţial poate fi factorizat, în inelul de polinoame $\mathbb{K}[x]$, ca $F(x)G(x)$, cu $\deg F = \deg G = 2$. Fie şi $C_F, C_G \neq 0$ coeficienţii dominanţi ai lui F, respectiv G. Luăm şi parametri nenuli λ, μ astfel încât $\lambda C_F \neq \pm\mu C_G$. Atunci putem scrie $FG = \dfrac{1}{4\lambda\mu}\left((\lambda F + \mu G)^2 - (\lambda F - \mu G)^2\right)$, şi deci putem alege $P(x) = \dfrac{1}{4\lambda\mu}x^2$, $R(x) = -\dfrac{1}{4\lambda\mu}x^2$, $Q(x) = \lambda F(x) + \mu G(x)$, $S(x) = \lambda F(x) - \mu G(x)$.

Din păcate, din punctul meu de vedere, chiar simpla existenţă a soluţiei de mai sus face din problemă doar un exerciţiu plicticos şi stupid de calcul. În plus, pentru a câta oară, enunţul este incomplet, ne-specificând care este inelul polinoamelor cu care lucrăm, un ”amănunt” care se dovedeşte a avea o importanţă capitală asupra rezultatului, căci pentru un corp al coeficienţilor de caracteristică 2 nu există soluţie, în timp ce pentru corpurile complex sau real apar soluţii specifice.

Subiectul (6)**.** *Rezolvaţi ecuaţia $p^2 - pq - q^3 = 1$ în numere prime.*

A. Golovanov

Soluţie. Vezi Subiectul 7, Ziua 2 Juniori. □

Subiectul (7)**.** *Punctele A_1, A_2, A_3 şi A_4 sunt vârfurile unui tetraedru regulat de latură 1. Punctele B_1 şi B_2 se află în interiorul figurii mărginite de planul $A_1A_2A_3$ şi sferele de rază 1 cu centre A_1, A_2, A_3.*
Demonstraţi că $B_1B_2 < \max\{B_1A_1, B_1A_2, B_1A_3, B_1A_4\}$.

A. KUPAVSKY

Soluţie (Oficială). O problemă de stereometrie (în trei dimensiuni). Analogul ei planimetric este

> *Punctele A_1, A_2 şi A_3 sunt vârfurile unui triunghi echilateral de latură 1. Punctele B_1 şi B_2 se află în interiorul figurii mărginite de dreapta A_1A_2 şi cercurile de rază 1 cu centre A_1, A_2. Demonstraţi că $B_1B_2 < \max\{B_1A_1, B_1A_2, B_1A_3\}$.*

Presupunând contrariul, fie $B_1B_2 \geq \max\{B_1A_1, B_1A_2, B_1A_3\}$. Inegalitatea va rămâne adevărată dacă B_2 este transportat pe frontiera figurii, de-a lungul semidreptei $(B_1B_2$. Considerăm două cazuri.

• B_2 se află pe un arc de cerc, fie el A_2A_3. Din inegalitate rezultă că B_1 şi A_2 se află de aceeaşi parte a mediatoarei segmentului B_2A_2, şi similar, B_1 şi A_3 se află de aceeaşi parte a mediatoarei segmentului B_2A_3. Dar aceste mediatoare se întâlnesc în centrul cercului, adică în A_1, deci singurul punct care satisface ambele aceste condiţii este A_1; însă el se află pe frontiera figurii, iar B_1 se află în interiorul ei.

• B_2 se află pe latura A_1A_2. În acest caz, distanţa de la B_1 la un punct interior segmentului A_1A_2 este întotdeauna mai mică decât distanţa la unul din capetele segmentului.

Argumente asemănătoare se aplică în cazul trei-dimensional (cerut), dar nu vom intra acum în detalii. Voi reveni (poate) cu precizări. □

Subiectul (8)**.** *Cartonaşe numerotate de la 1 la 2^n sunt distribuite la m copii, unde $1 \leq m \leq 2^n$, astfel încât fiecare copil primeşte cel puţin un cartonaş. Demonstraţi că numărul de moduri în care se poate face acest lucru este divizibil prin 2^{m-1}, dar nu şi prin 2^m.*

M. IVANOV

Soluţie. Acest număr de moduri este cunoscut în combinatorică, anume $m!S(2^n, m)$, unde $S(2^n, m) = \left\{ {2^n \atop m} \right\}$ este numărul Stirling de a doua speţă, adică numărul de moduri de a partiţiona o mulţime de 2^n elemente în m clase nevide (unde ordinea claselor este irelevantă). Voi reveni (poate) cu precizări. □

6. ÎNCHEIERE

Cu toate informaţiile acum disponibile, prezentarea mea este quasi-terminată.

Site-ul oficial este complet lăsat în paragină. Site-ul personal al lui A. Golovanov (care de la primele ediţii a fost implicat în acest concurs, ca propunător de probleme şi coordonator), a cărui adresă am menţionat-o ca link, şi care conţine istoricul concursului până în 2012, acum conţine şi materialele pentru 2013 ...[7] Din păcate soluţiile oficiale şi schemele de coordonare nu au fost niciodată postate în formă electronică. Broşuri tipărite, cu soluţii sumare, sunt distribuite participanţilor.

Concursul a fost, ca de obicei, destul de dificil, dar şi uneori interesant în ceea ce priveşte conţinutul matematic.

În concursul Juniori au participat 5 ţări, cu un total de 28 de concurenţi la proba de matematică, iar în concursul Seniori au participat 3 ţări, cu un total de 26 de concurenţi la proba de matematică. Rezultatele delegaţiei noastre la TUYMAADA 2013 sunt, cu felicitările de rigoare!

Nume			**Şcoala**	**Puncte**	**Medalie**
Simona DIACONU	X	S	ICHB, Bucureşti	**44**	**Aur**
Paul Gabriel MUSCĂ	XI	S	ICHB, Bucureşti	**43**	**Aur**
Andreea MĂGĂLIE	XI	S	ICHB, Bucureşti	25	Bronz
Ioan Laurenţiu PLOSCARU	IX	J	C.N. A. Lahovari, Rm. Vâlcea	**49**	**Aur**

Punctajul detaliat pe probleme a fost

Nume	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**Total**	**Medalie**
Simona DIACONU	7	7	7	7	7	7	0	2	**44**	**Aur**
Paul Gabriel MUSCĂ	7	7	7	7	4	7	4	0	**43**	**Aur**
Andreea MĂGĂLIE	7	7	0	0	7	3	1	0	25	Bronz
Ioan Laurenţiu PLOSCARU	7	5	7	7	7	7	2	7	**49**	**Aur**

Laurenţiu a obţinut (iarăşi, ca şi la jBMO) cel mai ridicat scor din concursul de Juniori! unde s-au acordat 1 medalie de Aur (49 puncte), 3 medalii de Argint ($27-34$ puncte) şi 4 medalii de Bronz ($17-23$ puncte), relativ la un total de 28 de participanţi.

Simona şi **Paul** au obţinut meritorii medalii de Aur în concursul de Seniori, unde s-au acordat 5 medalii de Aur ($43-48$ puncte), 2 medalii de Argint ($34-35$ puncte) şi 4 medalii de Bronz ($25-31$ puncte), relativ la un total de 26 de participanţi.

Din România a mai participat şi o delegaţie a Colegiului Naţional de Informatică Tudor Vianu din Bucureşti, cu rezultate nu tocmai strălucite.

Ca remarcă finală, acest concurs devine din ce în ce mai depopulat, şi lipsit de importanţă, deşi conţinutul matematic este decent. La ce bun continuăm să trimitem echipe la capătul pământului, când participarea generală este atât de scăzută, şi în majoră parte necompetitivă?

[7] Nici măcar comunitatea de useri de pe AoPS (`www.mathlinks.ro`) nu a reuşit să fie mai rapidă. Până pe 21 iulie de-abia fuseseră postate subiectele zilei 1 Juniori. Rezultatele finale se pare că au fost şi ele definitivate pe 21 iulie, dar de abia pe 25 iulie am intrat în posesia unei situaţii clare.